

NP-teljesség  
Algoritmuskészítés  
2019. tavasz  
9. gyakorlat

**NP-teljesség**

Az  $L$  nyelvet NP-teljesnek nevezzük, ha  $L \in \text{NP}$  és minden  $L' \in \text{NP}$  esetén  $L' \preceq L$ .

**Tétel**

Az alábbi problémák NP-teljesek.

**SAT**

*Bemenet:*  $\varphi$  Boole-formula.

*Kérdés:* kielégíthető-e  $\varphi$ ?

**3SAT**

*Bemenet:*  $\varphi$  egy 3CNF alakú Boole-formula.

*Kérdés:* kielégíthető-e  $\varphi$ ?

**3SZÍN**

*Bemenet:*  $G$  gráf.

*Kérdés:* kiszínezhető-e 3 színnel  $G$ ?

**HAM**

*Bemenet:*  $G$  gráf.

*Kérdés:* van-e  $G$ -ben Hamilton-kör?

**MAXFTL**

*Bemenet:*  $G$  gráf,  $k$  pozitív egész szám.

*Kérdés:* van-e  $G$ -ben  $k$  elemű független pont-halmaz?

**MAXKLIKK**

*Bemenet:*  $G$  gráf,  $k$  pozitív egész szám.

*Kérdés:* van-e  $G$ -ben  $k$  méretű klikk?

**RH**

*Bemenet:*  $(s_1, \dots, s_m; b)$ .

*Kérdés:* van-e olyan  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ , amelyre

$$\sum_{i \in I} s_i = b?$$

**PARTÍCIÓ**

*Bemenet:*  $(s_1, \dots, s_m)$ .

*Kérdés:* van-e olyan  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ , amelyre

$$\sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m s_i?$$

**Tétel**

Ha az  $X$  probléma NP-teljes,  $Y \in \text{NP}$  és  $X \preceq Y$ , akkor  $Y$  is NP-teljes.

- Adjuk meg, hogy az órán tanult 3SZÍN  $\preceq$  MAXFTL Karp-redukciónál mi lesz a képe a 3 pontú teljes gráfnak!
- Igazoljuk, hogy léteznek az alábbi Karp-redukciók!
  - ÖSSZEFÜGGŐ  $\preceq$  SAT, ahol ÖSSZEFÜGGŐ jelöli az összefüggő gráfok nyelvét.
  - $T \preceq$  MAXKLIKK, ahol  $T$  azt a nyelvet jelöli, ami az olyan egyszerű gráfokból áll, melyekben van legfeljebb 10 hosszú kör.
  - $X \preceq$  RH, ahol  $X$  azt a nyelvet jelöli, ami az olyan egyszerű gráfokból áll, amelyekben nincs három pontú kör.
- Igaz-e, hogy minden  $L$  reguláris nyelvre  $L \preceq$  SAT teljesül?
- Mutassuk meg, hogy az alábbi nyelvek NP-teljesek!
  - Az olyan  $(G, H)$  párokból álló nyelv, ahol  $G$  és  $H$  irányítatlan gráfok és  $G$ -nek van  $H$ -val izomorf részgráfja.

- (b) Az olyan  $(G, a, b, k)$  négyesekből álló nyelv, ahol  $G$  egy irányítatlan gráf,  $a, b \in V(G)$ ,  $k > 0$  egész szám és  $G$ -ben van olyan út  $a$  és  $b$  között, aminek a hossza legalább  $k$ .
  - (c) Az olyan  $G$  irányítatlan gráfokból álló nyelv, amelyekre  $G$ -ben van olyan  $C$  kör, hogy minden  $v \notin C$  csúcs össze van kötve éllel a  $C$  valamely csúcsával.
  - (d) Az olyan  $(G, a, b)$  szavakból álló nyelv, amelyeknél  $G$  egy egyszerű irányítatlan gráf,  $a$  és  $b$  ennek két csúcsa, és a  $G$  gráf csúcsai kiszínezhetők 3 színnel úgy, hogy  $a$  és  $b$  színe ugyanaz legyen.
  - (e) Az olyan  $G$  gráfokból álló nyelv, amelyek kiszínezhetők 3 színnel úgy, hogy minden színt ugyanannyiszor használjuk.
5. P-beliek vagy NP-teljesek a következő problémákból a szokásos módon származtatott nyelvek?
- (a) *Bemenet:*  $a_1, a_2, \dots, a_n$  pozitív egész számok.  
*Kérdés:* szétosztható-e ez a számhalmaz két részre úgy, hogy az egyik részbeli számok összege pontosan öttel nagyobb, mint a másik rész összege.
  - (b) *Bemenet:*  $s_1, s_2, \dots, s_n$  természetes számok.  
*Kérdés:* van-e olyan  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ , amelyre  $\sum_{i \in I} s_i$  osztható 3-mal?
6. Egy  $n$  emberből álló szervezetben  $b$  féle bizottság működik. Bizottsági ülések időpontját akarjuk kitűzni. Két különböző bizottság ülése akkor lehet azonos napon, ha nincs olyan ember, aki mindkét bizottságnak tagja. Legyen adott egy  $k$  pozitív egész szám és minden bizottsághoz a tagok névsora. Azt szeretnénk eldönteni, hogy az összes bizottság ülése lebonyolítható-e  $k$  napon belül. Vagy adjunk egy, a kívánt beosztást megtaláló polinomiális algoritmust vagy mutassuk meg, hogy a feladathoz tartozó nyelv NP-teljes.
7. Egy hivatal egy új,  $E$  emeletes épületbe fog költözni. Az épület minden emeletén ugyanakkora terület használható fel irodák kialakítására. Minden részleg megmondta, hogy összesen mekkora irodaterületre tart igényt. Azt akarjuk eldönteni, hogy megoldható-e a költözés úgy, hogy egyetlen részleg se legyen kettévágva, azaz egy részleg teljes egészében egy emeleten legyen (de egy emeletre kerülhet több részleg is). Mi lesz a problémához tartozó nyelv? Ez a nyelv P-ben van vagy NP-teljes?
8. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha  $L_1 \prec L_2$  és  $L_2 \in \text{NP}$ , akkor  $L_1 \in \text{NP}$ .  
(b) Bizonyítsuk be, hogy ha  $L_1 \prec L_2$  és  $L_2 \in \text{coNP}$ , akkor  $L_1 \in \text{coNP}$ .
9. Tudjuk, hogy az  $X$  és  $Y$  nyelvekre teljesül, hogy  $Y \prec \text{MAXFTL}$  és  $\overline{X} \prec \overline{Y}$ . Igazoljuk, hogy ekkor  $X \prec 3\text{SAT}$ .
10. Igazoljuk, hogy ha  $\text{NP} \neq \text{coNP}$ , akkor  $\text{MAXKLIKK} \notin \text{P}$ .
11. Igazoljuk, hogy ha egy  $X$  eldöntési probléma NP-teljes és  $X \in \text{NP} \cap \text{coNP}$ , akkor  $\text{NP} = \text{coNP}$ .