Minimális súlyú feszítőfák

Algoritmuselmélet

10. gyakorlat

2023.

1. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával (zárójelben az élsúlyok szerepelnek).

   $\boldsymbol{a}$: $b\,(2)$, $c\,(3)$,
   $\boldsymbol{b}$: $a\,(2)$, $d\,(2)$,
   $\boldsymbol{c}$: $a\,(3)$, $d\,(1)$,
   $\boldsymbol{d}$: $b\,(2)$, $c\,(1)$, $e\,(2)$, $f\,(4)$
   $\boldsymbol{e}$: $d\,(2)$, $f\,(1)$, $g\,(2)$
   $\boldsymbol{f}$: $d\,(4)$, $e\,(1)$, $g\,(2)$, $h\,(1)$
   $\boldsymbol{g}$: $e\,(2)$, $f\,(2)$, $h\,(3)$
   $\boldsymbol{h}$: $f\,(1)$, $g\,(3)$

   Keressünk G-ben Prim, illetve Kruskal algoritmusával minimális súly feszítőfát.

2. Egy irányítatlan, élsúlyozott gráf az alábbi éllistával adott (a zárójelben az élsúlyok szerepelnek).

   $\boldsymbol{a}$: $b\,(1)$, $d\,(3)$, $e\,(2)$
   $\boldsymbol{b}$: $a\,(1)$, $c\,(3)$, $e\,(1)$
   $\boldsymbol{c}$: $b\,(3)$, $d\,(x)$, $e\,(3)$
   $\boldsymbol{d}$: $a\,(3)$, $c\,(x)$, $e\,(y)$
   $\boldsymbol{e}$: $a\,(2)$, $b\,(1)$, $c\,(3)$, $d\,(y)$

   (a) Mi lehet x és y értéke, ha tudjuk, hogy az élsúlyok egész számok és azt is tudjuk, hogy a b csúcsból indított Prim-algoritmus a be, de, ab, bc sorrendben vette be az éleket.

   (b) Mely éleket és milyen sorrendben választja ki a Kruskal-algoritmus? (Ha több lehetséges megoldás is van, akkor az összeset adjuk meg.)

   (Az algoritmusok az egyenlő súlyú élek közül véletlenül választanak.)

3. Adjunk algoritmust egy maximális súlyú feszítőfa megkeresésére.

4. Egy irányítatlan, élsúlyozott, összefüggő, egyszerű gráfban az élsúlyozást a $c\colon E \to \mathbb{R}$ függvény adja meg.

   (a) Igaz-e, hogy ha egy $c(e)$ élsúly egyedi (nincs másik él, aminek ugyanekkora a súlya), akkor ez az e él a gráf minden minimális súlyú feszítőfájában benne van?

   (b) Igaz-e, hogy ha egy e él a gráf minden minimális súlyú feszítőfájában benne van, akkor $c(e)$ egyedi?

5. Mátrixával adott egy város úthálózatának összefüggő, élsúlyozott, irányítatlan, gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy hány hómunkás tudja az adott útszakaszt letakarítani 1 óra alatt. Szeretnénk tudni, hogy legalább mennyi hómunkásra van szükség összesen ahhoz, hogy egy éjszakai hóesés után (ami reggel 6-kor elállt), a 7 órás munkakezdés után 1 órán belül a főtérről (ami egy csúcs a gráfban) a város összes csomópontja elérhető legyen letakarított úton. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust feladat megoldására, ahol n a csomópontok számát jelöli.

6. Éllistával adott a $G = (V, E)$ egyszerű, összefüggő gráf. A gráf élei súlyozottak, a súlyfüggvény $c\colon E \to \{-1, 1\}$. Adjunk algoritmust, ami G-ben $O\big(|V| + |E|\big)$ lépésben meghatározza, hogy mennyi a minimális súlya egy olyan részgráfnak, ami G minden pontját tartalmazza és összefüggő.

7. Éllistával adott egy irányítatlan élsúlyozott G gráf és benne egy kijelölt v csúcs. Javasoljunk $O(e \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy létezik-e olyan minimális súlyú feszítőfa G-ben, amelyben a v csúcs elsőfokú, és ha létezik, akkor meg is ad egy ilyet.

8. Egy város úthálózata egy élsúlyozott irányítatlan gráf írja le, ami mátrixos formában adott. Az élek súlyai a csomópontok között vezető közvetlen utak felújítási költségét adják meg. A város polgármestere fel szeretné újítani a házától a városházáara vezető legrövidebb utat, de hogy ez ne legyen nagyon feltűnő, ezért egy nagyobb útfelújítást tervez. Mely éleknek megfelelő szakaszokat kellene felújítani, ha annak kell teljesülnie, hogy

   (i) bárhonnan bárhova el lehessen jutni felújított úton (hogy mindenki örüljön a városban),

   (ii) a polgármester házától a városházára vezető legrövidebb út minden része fel legyen újítva,

   (iii) a fenti két feltételt betartva a legkisebb költségű legyen a felújítás.

   Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ahol n a gráf pontjainak száma. (Az ismert, hogy a felújítandó legrövidebb út mely élekből áll össze, ezt nem kell megkeresnünk).

9. Mátrixával adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, melynek minden éléhez egy pozitív súly tartozik. A gráf minden csúcsa vagy egy raktárat vagy egy boltot jelképez, az élsúlyok a megfelelő távolságokat jelentik. Olyan G' részgráfját keressük G-nek, amely minden csúcsot tartalmaz, és amelyben minden bolthoz van legalább egy raktár, ahonnan oda tudunk szállítani (azaz van köztük út a gráfban). Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust egy a feltételeknek megfelelő minimális összsúlyú G' részgráf megkeresésére.

10. Éllistával adott egy $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan, összefüggő gráf, melynek az élei súlyozottak. Tegyük fel, hogy az élsúlyok mind különbözőek. A gráf egy körének értéke legyen a körben szereplő legnagyobb élsúly. Olyan kört szeretnénk találni a G gráfban, amelynek az értéke minimális. Adjunk algoritmust, mely $O\big(|V|^2 \log |V|\big)$ lépésben talál egy ilyen kört, vagy jelzi, hogy nincs kör G-ben.

11. A $G = (V, E)$ összefüggő, irányítatlan, súlyozott gráfban $|E| \le |V| + 100$. Adjunk $O\big(|V|\big)$ lépésszámú algoritmust egy minimális feszítőfa meghatározására.

12. Éllistájával adott egy $G = (V, E)$ egyszerű, összefüggő, irányítatlan gráf, melynek éleihez csupa különböző súlyt rendeltünk. A gráfot úgy akarjuk felosztani k darab $G_1 = (V_1, E_1)$, $\dots$, $G_k = (V_k, E_k)$ összefüggő részgráfra, hogy G minden csúcsa pontosan egy V_i-ben legyen benne. Egy ilyen felbontás értéke a különböző V_i csúcshalmazok között menő élek súlyai közül a legkisebb. Adjunk $O\big(|E| \log |E|\big)$ lépésszámú algoritmust, mely adott G és k esetén meghatároz egy maximális értékű felosztást.

13. Éllistával adott a G irányítatlan, egyszerű, összefüggő gráf, melynek n csúcsa és m éle van, valamint minden éléhez egy $1 \le c(e) \le n$ egész súly tartozik. Olyan feszítőfát keresünk G-ben, amelyben az élek súlya nem nagyon tér el egymástól, azaz van hozzá egy $k \ge 0$ egész, amire a feszítőfa minden e élére $2^k \le c(e) < 2^{k+1}$ teljesül. Adjunk $O(m \log n)$ lépésszámú algoritmust, amely a feltételeknek megfelelő feszítőfák közül egy minimális súlyút talál (ha egyáltalán van ilyen feszítőfa).