P, NP, coNP, Karp-redukció

Algoritmuselmélet

11. gyakorlat

2023.

A P osztály.

Egy eldöntési problémát P-belinek nevezünk, ha létezik olyan, a bemenet méretében nézve polinomidejű algoritmus, amely minden bemenetre helyesen megválaszolja a kérdést.

Az NP osztály.

Egy eldöntési problémát NP-belinek nevezünk, ha minden olyan bemenethez, amelyre a válasz igenlő, létezik a bemenet méretében nézve polinomméretű tanú, melynek segítségével a bemenet méretében nézve polinomidőben leellenőrizhető, hogy a válasz valóban igen.

A coNP osztály.

Egy eldöntési problémát coNP-belinek nevezünk, ha minden olyan bemenethez, amelyre a válasz nemleges, létezik a bemenet méretében nézve polinomméretű tanú, melynek segítségével a bemenet méretében nézve polinomidőben leellenőrizhető, hogy a válasz valóban nem.

Karp-redukció (polinomiális visszavezetés).

Azt mondjuk, hogy egy π_1 eldöntési probléma Karp-redukálható (vagy polinomiálisan visszavezethető) egy π_2 eldöntési problémára, ha a π_1 tetszőleges I bemenetéhez polinomidőben elkészíthető a π_2 egy I' bemenetét úgy, hogy a π_1 problémában az I bemenetre pontosan akkor igenlő a válasz, ha a π_2 problémában az I' bemenetre is az. Jelölése: $\pi_1 \prec \pi_2$.

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák P-beliek.
   (a) Bemenet: egy irányítatlan G gráf.
   Kérdés: kiszínezhető-e 2 színnel G?
   (b) Bemenet: egy 2CNF alakú φ Boole-formula.
   Kérdés: kielégíthető-e φ?
2. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák NP-beliek.
   (a) Bemenet: G és H irányítatlan gráfok.
   Kérdés: Izomorf-e G és H?
   (b) Bemenet: $s_1, s_2, \ldots, s_n$ és b pozitív egészek.
   Kérdés: van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, amelyre $\sum_{i \in I} s_i = b$?
   (c) Bemenet: egy 3CNF alakú φ Boole-formula.
   Kérdés: kielégíthető-e φ?
3. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák coNP-beliek.
   (a) Bemenet: n pozitív egész szám.
   Kérdés: prím-e n?
   (b) Bemenet: n pozitív egész szám.
   Kérdés: prímhatvány-e n?
   (c) Bemenet: egy (G, s, t, c) hálózat és egy $k \in \mathbb{Z}^+$ szám.
   Kérdés: van-e G-ben egy legalább k nagyságú folyam?
   (d) Bemenet: G irányítatlan gráf, $s, t \in V(G)$ csúcsok és egy k pozitív egész szám.
   Kérdés: létezik-e s és t között k darab páronként éldiszjunkt út?
4. Tekintsük az alábbi két problémát.

MAXFTL

Bemenet: egy irányítatlan G gráf és egy k pozitív egész szám.

Kérdés: van-e G-ben k-méretű független ponthalmaz, azaz igaz-e, hogy $\alpha(G) \geq k$?

MAXKLIKK

Bemenet: egy irányítatlan G gráf és egy k pozitív egész szám.

Kérdés: van-e G-ben k-méretű klikk, azaz igaz-e, hogy $\omega(G) \geq k$?

Lássuk be, hogy MAXFTL $\prec$ MAXKLIKK.

5. Lássuk be, hogy 3-SZÍN $\prec$ 2023-SZÍN.

6. Tekintsük az alábbi problémákat.

   H-ÚT

   Bemenet: egy irányítatlan G gráf.

   Kérdés: tartalmaz-e G Hamilton-utat?

   X

   Bemenet: egy irányítatlan G gráf és egy k pozitív egész szám.

   Kérdés: van-e G-nek olyan feszítőfája, melyben minden csúcs fokszáma legfeljebb k?

   Y

   Bemenet: egy irányítatlan G gráf és egy k pozitív egész szám.

   Kérdés: van-e G-nek olyan feszítőfája, melynek legfeljebb k levele van?

   Lássuk be, hogy H-ÚT $\prec X$ és H-ÚT $\prec Y$.

7. Tekintsük az alábbi két problémát.

   H

   Bemenet: egy irányítatlan G gráf.

   Kérdés: tartalmaz-e G Hamilton-kört?

   ***s*-*t*-H-ÚT**

   Bemenet: egy irányítatlan G gráf és $s, t \in V(G)$.

   Kérdés: van-e G-ben s-ből t-be Hamilton-út?

   Lássuk be, hogy H $\prec$ s-t-H-ÚT.

8. Tegyük fel, hogy van egy olyan X eljárásunk, ami egy bemenetként kapott G gráfra és k pozitív egész számra egy lépés alatt megmondja, hogy van-e G-ben legalább k-méretű független ponthalmaz.

   (a) Tervezzünk olyan, az X eljárást használó algoritmust, ami polinomidőben kiszámolja $\alpha(G)$-t.

   (b) Tervezzünk olyan, az X eljárást használó algoritmust, amely polinomidőben talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt.

9. Tegyük fel, hogy van egy X programunk, amely egy bemenetként kapott G gráfról egy időegység alatt megmondja, hogy kiszínezhető-e 3 színnel. Tervezzünk olyan X-et használó algoritmust, amely polinomidőben megtalálja G egy 3 színnel való színezését (ha van ilyen egyáltalán).