Gyakorlás

Algoritmuselmélet

3. gyakorlat

2023.

1. Az $1, 2, \dots, n$ számoknak adott két permutációja, $x_1, \dots, x_n$ és $y_1, \dots, y_n$. A két sorozat egy közös részsorozata egy $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, és egy $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ indexsorozattal adható meg, ahol $x_{i_m} = y_{j_m}$ teljesül minden $1 \leq m \leq k$ esetén. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami az x és y sorozatokban meghatároz egy leghosszabb közös részsorozatot.

2. Legyen $w = w_1 w_2 \dots w_n$ egy n betűből álló szó. Hívjuk részszónak w egy tetszőleges $w_i w_{i+1} \cdots w_{i+k}$ darabját ($1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-i$).

   (a) Adjunk algoritmust, ami $O(n)$ lépésben meghatározza az összes a-val kezdődő és b-re végződő részszó számát.

   (b) Adjunk olyan $O(n^2)$ futásidejű algoritmust, ami meghatározza a szóban található leghosszabb olyan részszó hosszát, ami palindroma (azaz jobbról és balról olvasva ugyanaz).

3. Egy $n \times n$ méretű táblázat mezőin akarunk eljutni az első oszlopból az utolsóba. Jelölje $A[i, j]$ az i-edik sor j-edik mezőjét ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$). A szabályok a következők. Az első oszlop tetszőleges mezőjéről indulhatunk és a végén az utolsó oszlop tetszőleges mezőjére érkezhetünk. Az A táblázat minden mezőjében 0 vagy 1 áll, ha az érték 0, akkor onnan nem mehetünk tovább, ha 1, akkor egy lépéssel a következő oszlopban vagy ugyanabba a sorba, vagy az eggyel nagyobb sorszámú sorba juthatunk. Adjunk egy dinamikus programozást használó eljárást, ami meghatározza az összes lehetséges útvonal számát. Mi az algoritmus lépésszáma?

4. Tekintsünk egy egyetlen útból álló irányítatlan gráfot. Az út csúcsainak száma n. Az úton az i-edik csúcs ($1 \leq i \leq n$) súlyát jelölje s_i; tegyük fel, hogy mindegyik s_i pozitív. A csúcsok egy tetszőleges X részhalmazának $s(X)$ súlya legyen az X-ben levő csúcsok súlyainak összege. Adjunk egy dinamikus programozást használó eljárást, ami meghatározza, hogy mekkora lehet az $s(X)$ legnagyobb értéke, ha X egy független csúcshalmaz, azaz X nem tartalmaz az úton szomszédos csúcsokat. Mi az algoritmus lépésszáma?

5. Adott egy pozitív egész számokból álló összeg $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Az összeadás jelek közül szorzásra cserélhetjük bármelyiket, de csak úgy, hogy ne legyenek szomszédos szorzások (azaz minden szám legfeljebb egy szorzásban szerepelhet). Adjunk $O(n)$ futásidejű algoritmust, ami meghatározza, hogy mekkora a műveletek elvégzése után kapható számok maximuma. Például az $1+4+3+2+3+4+2$ összegből kapható maximum $29 = 1 + 4 \cdot 3 + 2 + 3 \cdot 4 + 2$.

6. Adottak az $a_1, a_2, \dots, a_n$ egész számok, ahol minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén $0 < a_i < K$. Segítségükkel $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n$ alakban akarunk számokat előállítani úgy, hogy mindegyik c_i értéke -1, 0 vagy 1 lehet. Adjunk algoritmust, ami az a_i számok és a K ismeretében $O(n^2 K)$ lépésben meghatározza, hogy mely számok állnak elő ilyen alakban, és ami előáll, az hányféle $c_1, c_2, \dots, c_n$ választás esetén.

7. Indiana Jones be akar jutni egy titkos barlangba. A bejáratnál $s_1, s_2, \dots, s_m$ súlyú kövek vannak (ezek pozitív egészek). Az ajtó akkor nyílik ki, ha sikerül felrakni az összes követ az ajtó két oldalán levő egy-egy tálcára úgy, hogy a végén a két kőkupac súlyának különbsége a lehető legkisebb. Jelölje W az összes kő súlyának összegét. Adjunk $O(mW)$ futásidejű algoritmust, ami megoldja a feladatot. (Ha Indiana Jonesnak nem sikerül időben megoldani a feladatot, akkor ráesik egy nagy szikla.)