

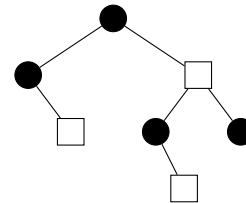
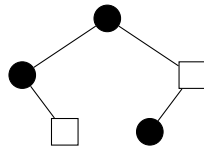
# Bináris keresőfák, piros-fekete fák

## ALGORITMUSELMÉLET

### 8. gyakorlat

2023.

- (a) Építsünk beszúrásokkal bináris keresőfát az alábbi sorrendben érkező számokból: 10, 3, 8, 12, 1, 5, 15, 4, 6, 13.  
(b) Hajtsuk végre rendre a TÖRÖL(4), TÖRÖL(12) és TÖRÖL(10) műveleteket.  
(c) Milyen sorrendben írja ki a preorder, inorder és posztorder bejárás a fában tárolt értékeket?
- Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk. Lehetséges-e, hogy egy KERES( $x$ ) hívás során a keresési út mentén a 20, 18, 3, 15, 5, 8, 9 kulcsokat látjuk ebben a sorrendben?
- Egy bináris fa inorder bejárása  $j, b, k, g, i, a, c, d, f, e, h$ , preorder bejárása pedig  $a, b, j, g, k, i, d, c, e, f, h$ . Rekonstruáljuk a fát.
- Egy bináris keresőfában  $n$  egész számot, egy másikban pedig  $m$  egész számot tárolunk. Rendezzük az  $n + m$  elemet  $O(n + m)$  lépésben.
- Egy bináris keresőfában  $n$  különböző egész számot tárolunk. Adjunk algoritmust, ami  $O(n)$  lépésben eldönti, hogy van-e a tárolt számok között két olyan, melyek különbsége 2013.
- Adott két bináris keresőfa, mindegyikben  $n$  különböző elemet tárolunk. Adjunk  $O(n)$  lépésszámú eljárást, ami eldönti, hogy igaz-e, hogy a két fában ugyanazok a számok szerepelnek.
- Adott két teljes bináris keresőfa, mindegyikben  $n$  elemet tárolunk. Adjunk  $O(\log n)$  lépésszámú eljárást, ami eldönti, hogy az első fa összes eleme nagyobb-e a második fa összes eleménél.
- Adott egy  $n$ -csúcsú bináris keresőfa, ami csupa különböző elemet tárol. Ennek minden  $v$  csúcsára meg akarjuk határozni, hogy a  $v$  gyökerű részében hány darab  $v$ -nél kisebb elem van tárolva. Adjunk algoritmust, ami ezt a feladatot  $O(n)$  lépésben megoldja.
- Lehetséges-e hogy az alábbi ábrákon egy piros-fekete fa csúcsait ábrázoltuk? (Az üres leveleket nem rajzoltuk fel, a fekete körök fekete csúcsokat, fehér négyzetek piros csúcsokat jelölnek.)



- Mennyi a tárolható elemek számának minimuma, illetve maximuma egy olyan piros-fekete fában, aminek a fekete magassága 3?
- Egy piros-fekete fában a 2010, 42,  $100\pi$ , 1848, 3 elemeket tároljuk úgy, hogy a gyökérben levő elem a 42. Hogyan nézhet ki a fa? (Adja meg az összeset és indokolja meg, hogy más nincs.)
- Előfordulhat-e, hogy egy piros-fekete fában a KERES művelet végrehajtása során bejárt nemlevél csúcsokban sorban a 2, 20, 12, 5, 8, 15, 10 elemeket találjuk?

13. Lehetséges-e, hogy egy piros-fekete fából a preorder bejárás 6, 1, 5, 3, 2, 4 sorrendben olvassa ki az elemeket?
14. Egy piros-fekete fában valamelyik, a gyökértől egy levélig vezető úton sorban az alábbi színű pontok vannak: fekete, piros, fekete, fekete. Mennyi a fában tárolt elemek számának minimuma?
15. Határozzuk meg egy piros-fekete fa azon  $v$  csúcsait, melyek esetén a  $v$  csúcsú részfa is egy piros-fekete fa.
16. Tervezzünk adatstruktúrát a következő feltételekkel. Természetes számokat kell tárolni, egy szám többször is szerepelhet, és a szükséges műveletek a következők. BESZÚR( $i$ ): az  $i$  szám egy újabb példányát tároljuk; TÖRÖL( $i$ ): az  $i$  szám egy példányát töröljük; MINDTÖRÖL( $i$ ): az  $i$  szám összes példányát töröljük; DARAB( $i$ ): visszaadja, hogy hány példány van az  $i$  számból. Az adatstruktúra legyen olyan, hogy ha  $m$ -féle elemet tárolunk, akkor mindegyik művelet lépésigénye  $O(\log m)$ .
17. Egy orvosi rendelőben a regisztrációnál kell bejelentkezni, ahol az ott dolgozók eldöntik, hogy a beteg az épp rendelő két orvos közül  $A$ -hoz vagy  $B$ -hez kell kerüljön, vagy bármelyikükhöz kerülhet. Ezen kívül, a beutaló ismeretében, a beteghez egy, a sürgősséget kifejező, számot is rendelnek. Amikor valamelyik orvos végzett egy beteggel, akkor azon betegek közül, akiket nem csak a másik orvos láthat el, behívja a legkisebb sürgősségi számút. Tegyük fel, hogy a kiosztott sürgősségi számok egymástól különbözőek. Írjunk le egy olyan adatszerkezetet, ami abban az esetben, ha  $n$  beteg várakozik, akkor a regisztráción az új beteg beillesztését, illetve az orvosoknak a következő beteg kiválasztását  $O(\log n)$  lépésben lehetővé teszi.
18. Tervezzünk olyan adatszerkezetet, ami egy rendezett halmaz elemeinek tárolására szolgál és a megvalósítandó műveletek a következők. FELÉPÍT( $A$ ): az  $A$  halmaz elemeiből felépíti a struktúrát; MINTÖR, MAXTÖR: a minimális, illetve maximális elem törlése; BESZÚR( $x$ ): az  $x$  elemet a struktúrába illeszti. A FELÉPÍT művelet költsége legyen  $O(n)$ , a MINTÖR, MAXTÖR, BESZÚR műveleteké pedig  $O(\log n)$ , ahol  $n$  a tárolt elemek száma.
19. Egy gyökeres színtezett fán  $A$  és  $B$  a következő játékot játssza: felváltva mozgatnak egy bábut, ami kezdetben az első szinten, a gyökérben van. Minden lépésben a soron következő játékos az aktuális  $v$  csúcsból  $v$  valamelyik fiába mozgatja a bábut. A játéknak akkor van vége, ha a bábu a fa egyik levelébe kerül. A levelek egy része zöldre van festve. A kezdő  $A$  játékos akkor nyer, ha a játék egy zöld levélben ér véget. Adott a fa éllistája, amiből minden levélről kiderül, hogy az zöld-e. Mutassunk egy  $O(n)$  lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy az  $A$  játékos hogyan játsszon, hogy biztosan nyerjen (feltéve, hogy van ilyen nyerő stratégiája).