Gyakorlás

Algoritmuselmélet

1. konzultáció

2023.

1. Tudjuk, hogy $f(n)$ egy nemnegatív, monoton növekvő függvény, melyre teljesül, hogy $f(n) \in O(n^2)$. Következik-e ebből, hogy $f\big(n^2 f(n) + 3f(n) + 5\big) \in O(n^4)$?

2. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{n}^{\sqrt{n}} \in O(2^n)$.

3. Adott az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egész számokból álló sorozat. Ebben olyan $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ rész- sorozatot keresünk, melynek elemei egy 5-különbségű számtani sorozatot alkotnak (azaz az értékek sorban $x, x+5, x+10, x+15, \ldots$). Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza a leghosszabb ilyen részsorozat hosszát.

4. Egy vizsgadolgozatban n feladatot kell megoldani, az i-edik feladatra p_i pontot lehet kapni. A feladatokat az adott sorrendben kell megoldani, de ki lehet hagyni közülük bármennyit. Ráadásul, ha a hallgató megoldja az i-edik feladatot (és így megkapja a p_i pontot), akkor annyira elfárad, hogy ki kell hagyja a következő f_i darab feladatot. (De többet is kihagyhat. A feladatsor első néhány feladatát is kihagyhatja.) Adjunk $O(n)$ futásidejű dinamikus programozást használó algoritmust, ami a p_i, f_i egész számok ismeretében meghatározza az elérhető összpontszám maximumát.

5. Éllistájával adott egy irányított G gráf, melynek minden csúcsa színes: piros, fehér vagy zöld színű. Adott a gráfban egy A csúcs, ami piros és egy B csúcs, ami zöld. Adjunk $O(n+m)$ lépésszámú algoritmust, ami megtalálja a legkevesebb élből álló olyan utat A-ból B-be, amiben az első néhány csúcs piros, majd néhány (legalább egy) fehér csúcs után csupa zöld csúcs következik (n és m szokás szerint a gráf csúcs-, illetve élszámát jelölik).

6. Szomszédossági mátrixával adott a $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ csúcshalmazon a G irányított gráf. Ebben az olyan irányított körök érdekelnek minket, amelyek átmennek a v_1 csúcson és innen kezdve a kör mentén a csúcsok indexei sorrendben követik egymást; például egy k-csúcsú kör mentén a csúcsok indexe sorban $1 = i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k$. Adjunk algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben meghatározza, hogy mi az a legnagyobb k szám, amire G-ben van k csúcsból álló, a feltételnek megfelelő kör.

7. Egy középkori királyság úthálózata egy n-csúcsú irányítatlan gráffal adott (a csúcsok a városok, az élek a köztük vezető utak). Az A városból szeretnénk a B városba árut vinni, de bizonyos városok csak akkor engednek át minket a terményünkkel, ha vámot fizetünk nekik (az A és B városban nem kell vámot fizetnünk). A vám összege fix, nem függ az áru mennyiségétől, de a vám városonként más és más lehet. Adjunk algoritmust, ami a városonkénti vámok és a gráf szomszédossági mátrixának ismeretében $O(n^2)$ lépésben meghatároz egy olyan útvonalat, amin a legkevesebb sarcot szedik be tőlünk.

8. Szomszédossági mátrixával adott n-csúcsú, élsúlyozott, irányítatlan gráfként ismerjük egy ország úthálózatát: a csomópontok a városok, az élek a közvetlen összeköttetések a városok között, az élek súlya pedig a városok közti távolságot adja meg. (Feltehetjük, hogy a távolságok egészek.) Adjunk $O(n^6)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy lehetséges-e úgy kiválasztani öt várost, hogy ezektől bármely más város legfeljebb 50 kilométerre van. (Ezekbe a városokba lenne érdemes hókotrókat telepíteni.)