Gyakorlás

Algoritmuselmélet

2. konzultáció

2023.

1. Az $A[1:2013]$ tömbben egy kupac adatstruktúrát tárolunk, minden tárolt elem különböző. Tudjuk, hogy ebben a kupacban a legnagyobb elem $A[i]$. Határozzuk meg i összes lehetséges értékét.

2. Egy kupac elemeit preorder bejárás szerint kiolvasva a következő számsorozatot kapjuk: $1, 17, 19, 21, 22, 31, 37, 2, 8, 3$. Rekonstruálható-e ebből a kupac?

3. Az $A[0:n]$ tömbre teljesül, hogy minden $2 \leq i \leq n-2$ esetén $A[i-2] < A[i] < A[i+2]$. Adjon a tömb rendezésére egy $O(n)$ összehasonlítást használó algoritmust.

4. Egy $n \times n$-es táblázatban különböző egész számokat tárolunk úgy, hogy minden sorban balról jobbra és minden oszlopban fentről lefelé növekednek a számok. Adjunk $O(n)$ összehasonlítást használó algoritmust, ami eldönti, hogy egy adott k egész szerepel-e a táblázatban.

5. Az $a_1, \ldots, a_n$ természetes számokról tudjuk, hogy 10 darab kivételével teljesül, hogy $10 \leq a_i \leq 10n$; a kivételes 10 természetes szám bármekkora lehet. Adjunk $O(n)$ futásidejű algoritmust, ami növekvően rendezi az összes számot.

6. Egy tányérra n különböző átmérőjű, kör alakú palacsinta van felhalmozva véletlenszerű sorrendben. Szeretnénk a palacsintákat alulról felfelé növekvő sorrendbe rendezni. Ehhez egyféle műveletet használhatunk: egy lapáttal benyúlunk bármely palacsinta alá és a felette levő kupacot fejjel lefelé fordítva visszatesszük a kupacra. Adjunk olyan algoritmust, ami minden esetben legfeljebb $2n-3$ művelettel elvégzi a feladatot.

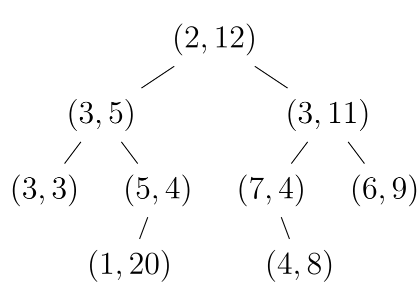
7. Definiáljunk egy rendezési relációt a pozitív egész számpárokból álló alaphalmazra a következőképpen: $(a,b) < (c,d)$ akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\text{vagy} \qquad a \cdot b < c \cdot d, \qquad \text{vagy} \qquad a \cdot b = c \cdot d \text{ és } \min(a,b) < \min(c,d).$$

   Az alábbi ábrán egy bináris keresőfa látható ezzel a rendezéssel.

   (a) Szúrjuk be a keresőfába a $(6,4)$ párt.

   (b) Az így kapott keresőfából töröljük az $(2,12)$ elemet.



8. Egy piros-fekete fában az x csúcs gyermekei y_1 és y_2, az y_2 gyermekei pedig z_1 és z_2. Tudjuk, hogy még, hogy y_1 levél. Mi mondható el x, y_1, y_2, z_1, z_2 színéről?

9. Adott egy n elemet tartalmazó F piros-fekete fa és két kulcs X és Y. Az X kulcs az x csúcsban, az Y pedig az y csúcsban van. Adjunk $O(\log n)$ lépésszámú algoritmust, amely megadja az x-et és az y-t összekötő F-beli úton a minimális kulcsértéket.

10. Egy 2-3 fában az $1, 5, 7, 8, 12, 13, 20, 21$ kulcsokat tároljuk, és a levelek feletti szinten a csúcsoknak (balról jobbra haladva) 3, 3, 2 levelük van.

    (a) Rajzoljuk fel a 2-3 fát.

    (b) Szúrjuk be a fába a 6-ot.

11. Kettős hash-elést használva akarunk beszúrni elemeket egy kezdetben üres, 11-elemű hash-táblába. Első hash-függvénynek a $h(K) = K \pmod{11}$ függvényt, második hash-függvénynek a $h'(K) = (K \pmod 6) + 1$ függvényt választjuk. Hogyan változik a tábla a $3, 6, 14, 9, 25$ kulcsok ezen sorrendben történő beszúrása során?

12. Éllistával adott egy $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan, összefüggő gráf, melynek az élei súlyozottak. Tegyük fel, hogy az élsúlyok mind különbözőek. A gráf egy körének értéke legyen a körben szereplő legnagyobb élsúly. Olyan kört szeretnénk találni a G gráfban, aminek az értéke minimális. Adjunk algoritmust, mely $O\big(|V|^2 \log |V|\big)$ lépésben talál egy ilyen kört vagy jelzi, hogy nincs kör G-ben.

13. Éllistával adott egy egyszerű, összefüggő, súlyozott, irányítatlan $G = (V, E)$ gráf, amiben nincs két egyforma súlyú él. Adjunk $O\big(|V| \cdot |E|\big)$ lépésszámú algoritmust, ami megadja a gráfban a második legkisebb súlyú feszítőfát.

14. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk ami 1 lépésben tetszőleges $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ Boole-formuláról eldönti, hogy kielégíthető-e. Adjunk polinomiális algoritmust, ami egy tetszőleges kielégíthető formulára megad egy kielégítést, azaz a változók olyan értékadását, amire a formula értéke igaz.

15. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi probléma coNP-beli.

    Bemenet: $n \in \mathbb{Z}^+$ szám.

    Kérdés: igaz-e, hogy n bármely két osztójának különbsége legalább 20?

16. A 3KLASZTER eldöntési probléma bemenete egy K_n teljes gráf, egy $w\colon E(G)\mathbb{R}$ súlyfüggvény és egy $k \geq 0$ szám, és azt akarjuk eldönteni, hogy G csúcsai particionálhatók-e 3 osztályba úgy, hogy egy osztályon belül bármely él súlya legfeljebb k (de különböző osztálybeli csúcsok között bármilyen súlyú él futhat). Bizonyítsuk be, hogy a 3KLASZTER probléma NP-teljes.

17. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi probléma NP-teljes.

    Bemenet: $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z}^+$ számok.

    Kérdés: van-e olyan $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ indexhalmaz, amelyre

$$\left|\sum_{i \in I} s_i - \sum_{i \notin I} s_i\right| \leq 1?$$