coNP és Karp-redukció

Algoritmuselmélet

10. gyakorlat

2024.

A coNP osztály.

Egy eldöntési problémát coNP-belinek nevezünk, ha minden olyan bemenethez, amelyre a válasz nemleges, létezik a bemenet méretében nézve polinomméretű tanú, melynek segítségével a bemenet méretében nézve polinomidőben leellenőrizhető, hogy a válasz valóban nem.

1. Egy tízes-számrendszerbeli alakjában adott pozitív egész számról el akarjuk dönteni, hogy
   (a) négyzetszám-e;
   (b) 2-hatvány-e.

   Bizonyítsuk be, hogy ezek a problémák P-beliek.

2. Éllistájával adott egy irányított gráf, és el akarjuk dönteni, hogy legfeljebb 3 él elhagyásával el lehet-e érni, hogy DAG legyen. Bizonyítsuk be, hogy ez a probléma P-ben van.

3. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák coNP-beliek.
   (a) Bemenet: n pozitív egész szám.
   Kérdés: prím-e n?
   (b) Bemenet: n pozitív egész szám.
   Kérdés: prímhatvány-e n?
   (c) Bemenet: G páros gráf és egy k pozitív egész szám.
   Kérdés: létezik-e G-ben k-élű párosítás?
   (d) Bemenet: egy (G, s, t, c) hálózat és egy $k \in \mathbb{Z}^+$ szám.
   Kérdés: van-e G-ben egy legalább k nagyságú folyam?

4. Lássuk be, hogy az alábbi eldöntési feladat coNP-ben van.

   Bemenet: egy irányítatlan G gráf, a G gráf egy v csúcsa és egy $k \geq 3$ pozitív egész szám.

   Kérdés: igaz-e, hogy vagy nincsen G-ben k-méretű klikk vagy a v csúcs benne van G mindegyik k-méretű klikkjében?

5. Tegyük fel, hogy van egy olyan X eljárásunk, ami egy bemenetként kapott G gráfra és k pozitív egész számra egy lépés alatt megmondja, hogy van-e G-ben legalább k-méretű független ponthalmaz.
   (a) Tervezzünk olyan, az X eljárást használó algoritmust, ami polinomidőben kiszámolja $\alpha(G)$-t.
   (b) Tervezzünk olyan, az X eljárást használó algoritmust, amely polinomidőben talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt.

6. Tegyük fel, hogy van egy X programunk, amely egy bemenetként kapott G gráfról egy időegység alatt megmondja, hogy kiszínezhető-e 3 színnel. Tervezzünk olyan X-et használó algoritmust, amely polinomidőben megtalálja G egy 3 színnel való színezését (ha van ilyen egyáltalán).

7. Tekintsük az alábbi két problémát.

MAXFTL

Bemenet: egy irányítatlan G gráf és egy k pozitív egész szám.

Kérdés: van-e G-ben k-méretű független ponthalmaz, azaz igaz-e, hogy $\alpha(G) \geq k$?

MAXKLIKK

Bemenet: egy irányítatlan G gráf és egy k pozitív egész szám.

Kérdés: van-e G-ben k-méretű klikk, azaz igaz-e, hogy $\omega(G) \geq k$?

Lássuk be, hogy a MAXFTL probléma tetszőleges I bemenetéhez polinomidőben elkészíthető a MAXKLIKK egy I' bemenete úgy, hogy a MAXFTL problémában az I bemenetre pontosan akkor igenlő a válasz, ha a MAXKLIKK problémában az I' bemenetre is az.

8. Tekintsük az alábbi problémákat.

   H-ÚT

   Bemenet: egy irányítatlan G gráf.

   Kérdés: tartalmaz-e G Hamilton-utat?

   X

   Bemenet: egy irányítatlan G gráf és egy k pozitív egész szám.

   Kérdés: van-e G-nek olyan feszítőfája, melyben minden csúcs fokszáma legfeljebb k?

   Y

   Bemenet: egy irányítatlan G gráf és egy k pozitív egész szám.

   Kérdés: van-e G-nek olyan feszítőfája, melynek legfeljebb k levele van?

   (a) Lássuk be, hogy a H-ÚT probléma tetszőleges I bemenetéhez polinomidőben elkészíthető az X egy I' bemenete úgy, hogy a H-ÚT problémában az I bemenetre pontosan akkor igenlő a válasz, ha a X problémában az I' bemenetre is az.

   (b) Lássuk be, hogy a H-ÚT probléma tetszőleges I bemenetéhez polinomidőben elkészíthető az Y egy I' bemenete úgy, hogy a H-ÚT problémában az I bemenetre pontosan akkor igenlő a válasz, ha a Y problémában az I' bemenetre is az.

9. A 42-KÖR problémában azt kell eldönteni egy egyszerű, irányítatlan G gráfról, hogy G csúcsait le lehet-e fedni pontosan 42 darab páronként pontdiszjunkt körrel (azaz 42 olyan körrel, hogy semelyik két körnek nincsen közös pontja).

   (a) Lássuk be, hogy ez a probléma NP-ben van.

   (b) Lássuk be, hogy a 42-KÖR probléma tetszőleges I bemenetéhez polinomidőben elkészíthető az előadáson tanult H probléma egy I' bemenete úgy, hogy a 42-KÖR problémában az I bemenetre pontosan akkor igenlő a válasz, ha a H problémában az I' bemenetre is az.

10. Legyen A és B két olyan P-beli eldöntési probléma, melyek bemenete megegyezik (de a feltett kérdésük különböző). Legyen továbbá C az az eldöntési probléma, hogy az A és B probléma kérdésének valamelyikére igen-e a válasz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $C \in \mathrm{P}$.

11. Legyen A egy polinomidejű algoritmus, melynek bemenete és kimenete is egy bitsorozat. Tekintsük azt a B eljárást, amely egy bemenetként kapott bitsorozaton futtatja az A algoritmust, majd a kapott kimeneten ismét futtatja az A algoritmust, és így tovább, teszi ezt összesen c alkalommal.

    (a) Bizonyítsuk be, hogy ha c konstans, akkor B is polinomiális futásidejű.

    (b) Mit mondhatunk B lépésszámáról, ha c polinomiális nagyságrendű lehet a bemenet hosszában nézve?