NP-teljesség

Algoritmuselmélet

11. gyakorlat

2024.

A Karp-redukció tulajdonságai.

– Ha $X \prec Y$ és $Y \in \mathrm{P}$, akkor $X \in \mathrm{P}$.
– Ha $X \prec Y$ és $Y \in \mathrm{NP}$, akkor $X \in \mathrm{NP}$.
– Ha $X \prec Y$ és $Y \in \mathrm{coNP}$, akkor $X \in \mathrm{coNP}$.
– Ha $X \prec Y$, akkor $\overline{X} \prec \overline{Y}$.
– Ha $X \prec Y$ és $Y \prec Z$, akkor $X \prec Z$.

NP-nehézség.

Egy eldöntési problémát NP-nehéznek nevezünk, ha minden NP-beli probléma visszavezethető rá.

NP-teljesség.

Egy eldöntési problémát NP-teljesnek nevezünk, ha NP-beli és NP-nehéz.

Iszonyú Hasznos Tétel.

Ha π_1 NP-teljes, π_2 NP-beli, valamint $\pi_1 \prec \pi_2$, akkor π_2 is NP-teljes.

Tétel.

Az alábbi problémák NP-teljesek.

SAT
Bemenet: φ Boole-formula.
Kérdés: kielégíthető-e φ?

3-SZÍN
Bemenet: G gráf.
Kérdés: kiszínezhető-e G 3 színnel?

H
Bemenet: G gráf.
Kérdés: van-e G-ben Hamilton-kör?

MAXFTL
Bemenet: G gráf, $k \in \mathbb{Z}^+$.
Kérdés: van-e G-ben k-elemű független ponthalmaz?

MAXKLIKK
Bemenet: G gráf, $k \in \mathbb{Z}^+$.
Kérdés: van-e G-ben k-méretű klikk?

RH
Bemenet: $s_1, \dots, s_m; b \in \mathbb{Z}^+$.
Kérdés: van-e olyan $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, amelyre $\sum_{i \in I} s_i = b$?

PARTÍCIÓ
Bemenet: $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{Z}^+$.
Kérdés: van-e olyan $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, amelyre $\sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} s_i$?

HÁTIZSÁK
Bemenet: $s_1, \dots, s_m; v_1, \dots, v_m; b; k \in \mathbb{Z}_+$.
Kérdés: van-e olyan $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, amelyre $\sum_{i \in I} s_i \le b$ és $\sum_{i \in I} v_i \ge k$?

1. Mi a bonyolultsága az alábbi feladatoknak?

(a) Bemenet: egy irányított G gráf.
Kérdés: aciklikus-e G?

(b) Bemenet: egy G gráf és $e \in E(G)$.
Kérdés: van-e G-ben e-n átmenő kör?

(c) Bemenet: egy irányított G gráf, $s, t \in V(G)$, $l\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$ hosszfüggvény és $k \in \mathbb{R}^+$.
Kérdés: van-e G-ben s-ből t-be legfeljebb k-hosszú út?

(d) Bemenet: egy irányított G gráf, $s, t \in V(G)$, $l\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$ hosszfüggvény és $k \in \mathbb{R}^+$.
Kérdés: van-e G-ben s-ből t-be legalább k-hosszú út?

(e) Bemenet: egy irányított, aciklikus G gráf, $s, t \in V(G)$, $l\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$ hosszfüggvény és $k \in \mathbb{R}^+$.
Kérdés: van-e G-ben s-ből t-be legalább k hosszú út?

(f) Bemenet: egy irányítatlan G gráf, $c\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény és $k \in \mathbb{R}^+$.
Kérdés: igaz-e, hogy G-ben bármely feszítőfa költsége legalább k?

(g) Bemenet: egy irányítatlan G gráf.
Kérdés: tartalmaz-e G Euler-körsétát?

(h) Bemenet: G és H irányítatlan gráfok.
Kérdés: van-e G-nek H-val izomorf részgráfja?

(i) Bemenet: $k \in \mathbb{Z}^+$ és egy $(5k)$-csúcsú irányítatlan G gráf.
Kérdés: van-e G-ben pontosan k-élű kör?

(j) Bemenet: egy irányított G gráf.
Kérdés: van-e G-ben pontosan 5-élű irányított kör?

(k) Bemenet: egy irányítatlan G gráf.
Kérdés: van-e G-ben páratlan hosszúságú kör?

(l) Bemenet: egy irányítatlan G gráf és $k \in \mathbb{Z}^+$.
Kérdés: kiszínezhető-e a G gráf k színnel?

(m) Bemenet: egy G gráf és $x, y \in V(G)$.
Kérdés: kiszínezhető-e G három színnel úgy, hogy x és y színe különböző legyen?

(n) Bemenet: egy G gráf és $x, y \in V(G)$.
Kérdés: kiszínezhető-e G három színnel úgy, hogy x és y színe azonos legyen?

(o) Bemenet: egy G gráf.
Kérdés: van-e G-ben egy legalább 100-méretű klikk?

(p) Bemenet: egy G gráf és egy $k \in \mathbb{Z}^+$ szám.
Kérdés: van-e G-ben egy legfeljebb k-méretű lefogó ponthalmaz?

(q) Bemenet: egy G páros gráf és $k \in \mathbb{Z}^+$.
Kérdés: van-e G-ben egy legalább k-méretű független ponthalmaz?

(r) Bemenet: egy G páros gráf és $k \in \mathbb{Z}^+$.
Kérdés: van-e G-ben legalább k-méretű párosítás?

(s) Bemenet: egy G páros gráf.
Kérdés: teljesül-e G-ben a Hall-feltétel?

(t) Bemenet: egy (G, s, t, c) hálózat és $k \in \mathbb{Z}^+$.
Kérdés: van-e G-ben k-nagyságú folyam?

2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi Karp-redukciók léteznek és adjunk is meg egy-egy Karp-redukciót. (Az s-t-H-ÚT problémában az a kérdés, hogy egy adott irányítatlan G gráf adott s és t csúcsa között vezet-e Hamilton-út.)

   (a) ÖSSZEFÜGGŐ $\prec$ H
   (b) ÖSSZEFÜGGŐ $\prec$ 2-SZÍN
   (c) 2-SZÍN $\prec$ 2-SAT
   (d) H $\prec$ s-t-H-ÚT

3. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi problémák NP-teljesek.

   (a) Adott G gráf csúcsai kiszínezhetőek-e 3 színnel helyesen úgy, hogy mindegyik színt ugyanannyiszor használjuk?
   (b) Adott G irányítatlan gráf csúcsai színezhetőek-e úgy három színnel, hogy legfeljebb egy olyan él legyen, aminek a végpontjai azonos színűek?
   (c) Adott egy irányítatlan, összefüggő G gráf, melynek páros sok csúcsa van, az élek egy része pirosra, a többi kékre vannak színezve, és azt szeretnénk eldönteni, hogy van-e G-ben olyan Hamilton-kör, ami két egyenlő hosszú piros és kék ívből áll?

4. Tekintsük azt a problémát, hogy egy adott G irányítatlan, élsúlyozott gráfban mekkora a minimális súlyú Hamilton-kör súlya. Adjuk meg, mi lesz az ehhez tartozó eldöntési probléma, és lássuk be, hogy az NP-teljes.

5. Egy n emberből álló szervezetben b-féle bizottság működik. Bizottsági ülések időpontját akarjuk kitűzni. Két különböző bizottság ülése akkor lehet azonos napon, ha nincs olyan ember, aki mindkét bizottságnak tagja. Legyen adott egy k pozitív egész szám és minden bizottsághoz a tagok névsora. Azt szeretnénk eldönteni, hogy a b bizottsági ülés kitűzhető-e összesen legfeljebb k különböző napra. Vagy adjunk egy, a kívánt beosztást megtaláló polinomiális algoritmust vagy mutassuk meg, hogy a feladathoz tartozó eldöntési probléma NP-teljes.

6. Tudjuk, hogy $X_1 \prec X_2$ és hogy az X_2 komplementere Karp-redukálható a PARTÍCIÓ nyelvre. Igazoljuk, hogy ekkor $X_1 \in$ coNP.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha MAXKLIKK $\in$ P, akkor SAT $\in$ P is teljesül.

8. Tegyük fel, hogy létezik olyan X eldöntési probléma, amire X és $\overline{X}$ is NP-teljes. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden Y NP-teljes nyelv esetén $\overline{Y}$ is NP-teljes.

9. Adjunk meg egy 3-SAT $\prec$ 3-SZÍN Karp-redukciót.