

NP-teljesség  
ALGORITMUSELMÉLET

12. gyakorlat

2024.

1. Tekintsük azt a problémát, hogy egy adott  $G$  irányítatlan gráfban mekkora a minimális lefogó pont-halmaz mérete.

- (a) Írjuk fel a feladatot egészértékű programozási feladatként.
- (b) Adjuk meg, mi lesz az ehhez tartozó eldöntési probléma, és lássuk be, hogy az NP-teljes.

2. Mi a bonyolultsága az alábbi feladatoknak?

- (a) Adott  $G$  páros gráf és  $k \in \mathbb{Z}^+$  szám esetén létezik-e  $G$ -ben legfeljebb  $k$ -méretű lefogó pont-halmaz.
- (b) Adott CNF-alakú Boole-formula, melyben minden klóz pontosan 4 literált tartalmaz, kielégíthető-e.
- (c) Adott Boole-formula kielégíthető-e legalább kétféleképpen.
- (d) Adott  $G = (V, E)$  gráf és  $k \in \mathbb{Z}^+$  szám esetén van-e  $G$ -nek néhány összefüggő komponense, melyek pontszámainak összege éppen  $k$ .
- (e) Adott  $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{Z}^+$  számok esetén van-e olyan  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ , amelyre  $\sum_{i \in I} s_i = 2024$ .
- (f) Adott  $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{Z}^+$  számhalmaz partícionálható-e három részre úgy, hogy mindhárom rész összege ugyanannyi legyen.
- (g) Adott egy  $G = (V, E)$  irányítatlan gráfban van-e olyan  $C$  kör, melyhez minden  $v \notin V(C)$  csúcsból vezet él.
- (h) Adott  $G$  egyszerű gráf csúcsai kiszínezhetőek-e helyesen a piros, kék, zöld, sárga színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs kék.

3. Az alábbi problémák mindegyikében a bemenet egy  $G = (V, E)$  irányítatlan gráf és a gráf pontjainak egy  $S \subseteq V$  részhalmaza. Határozzuk meg, hogy az alábbi kérdések közül melyik esetben kapunk P-beli, melyik esetben NP-teljes problémát.

- (a) Van-e olyan feszítőfa  $G$ -ben, melyben  $S$  minden eleme levél?
- (b) Van-e olyan feszítőfa  $G$ -ben, melynek levelei pontosan az  $S$ -beli pontok?
- (c) Van-e olyan feszítőfa  $G$ -ben, melynek levelei az  $S$ -beli pontok közül valók?

4. Tekintsük az alábbi eldöntési problémát.

LÁDAPAKOLÁS

Bemenet:  $s_1, \dots, s_m \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  súlyok és  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

Kérdés: el lehet-e helyezni a súlyokat  $k$  darab 1-súlykapacitású ládába?

- (a) Bizonyítsuk be, hogy a LÁDAPAKOLÁS probléma NP-teljes.
- (b) P-beli vagy NP-teljes a LÁDAPAKOLÁS problémának az a változata, amikor minden súly  $1/4$  vagy  $4/5$ ?

5. Fogalmazzuk meg az alábbi feladatokhoz tartozó eldöntési problémát, majd határozzuk meg a problémák bonyolultságát.

- (a) Adott irányítatlan  $G$  gráf,  $w: V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  súlyfüggvény esetén olyan feszítőfát keresünk, melyben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális.
- (b) Egy munkahelyen buszos kirándulást szerveznek. A jó hangulat érdekében mindenki előre megmondhatta, hogy kivel nem hajlandó egy buszon utazni (több személyt is fel lehetett sorolni). Tegyük fel, hogy tetszőlegesen nagy befogadóképességű buszok állnak rendelkezésre. A szervezők olyan beosztást szeretnének készíteni, ami minél kevesebb buszba beosztja az összes kirándulót úgy, hogy senkinek sem kell olyannal egy buszban ülnie, akivel nem akart.
- (c) A HÁTIZSÁK problémának a folytonos változata, amiben a tárgyak tetszőlegesen darabolhatóak: egy  $s$ -súlyú,  $v$ -értékű tárgynak vehetjük tetszőleges  $r$ -edrészét (ahol  $0 \leq r \leq 1$  racionális szám), és akkor ennek a résznek a súlya  $rs$ , az értéke pedig  $rv$ .
- (d) Egy hivatal egy új,  $E$ -emeletes épületbe fog költözni. Az épület minden emeletén összesen  $T$  négyzetméternyi terület használható fel irodák kialakítására. Minden részleg megmondta, hogy összesen mekkora irodaterületre tart igényt. Azt akarjuk eldönteni, hogy megoldható-e a költözés úgy, hogy egyetlen részleg se legyen kettévágva, azaz egy részleg teljes egészében egy emeleten legyen (de egy emeletre kerülhet több részleg is).

6. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi eldöntési probléma NP-teljes.

Bemenet: egy olyan  $\varphi$  Boole-formula, melyben minden változó legfeljebb háromszor szerepel.

Kérdés: kielégíthető-e  $\varphi$ ?

7. Írjuk fel az alábbi problémákat egészértékű programozási feladatként:

- (a) maximális méretű klikk keresése;
- (b) maximális súlyú teljes párosítás keresése;
- (c) minimális költségű feszítőfa keresése.