A szélességi és a mélységi bejárás alkalmazásai

ALGORITMUSELMÉLET

4. gyakorlat

2024.

1. Rendezzük a *cab*, *abb*, *cca*, *bcb*, *cbc*, *aac*, *bac* elemeket radix rendezéssel.

2. Vázoljunk egy $O(n)$ időigényű algoritmust n olyan egész számból álló sorozat rendezésére, melynek elemei az
   (a) $\{1, \ldots, 3n\}$ tartományba esnek;
   (b) $\{1, \ldots, n^7 - 1\}$ tartományba esnek.

3. Adott egy $n \times n$-es mátrix. Adjunk $O(n^2 \log n)$ összehasonlítást használó algoritmust, amely eldönti, van-e két olyan sor, amelyeknek az első oszlopbeli elemei különböznek, viszont az összes többi oszlopban megegyeznek.

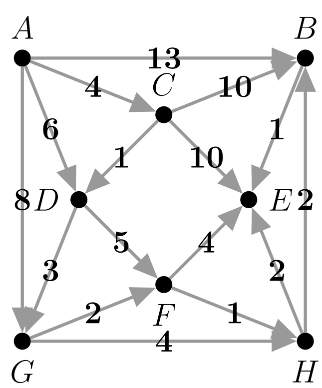
4. Éllistájukkal adottak az alábbi G_1 és G_2 irányított gráfok.

G_1:	$\boldsymbol{a}$: b, c, d	$\boldsymbol{b}$: d	$\boldsymbol{c}$: d	$\boldsymbol{d}$: e	$\boldsymbol{e}$: a		
G_2:	$\boldsymbol{a}$: f, g	$\boldsymbol{b}$: a, g	$\boldsymbol{c}$: -	$\boldsymbol{d}$: -	$\boldsymbol{e}$: c, d	$\boldsymbol{f}$: e	$\boldsymbol{g}$: e, f

   (a) Döntsük el, hogy a G_1 és G_2 gráfok aciklikusak-e.
   (b) Amelyik gráf aciklikus, abban adjunk meg egy topologikus sorrendet.
   (c) Amelyik gráf aciklikus, abban határozzuk meg az a csúcsból a többi csúcsba vezető legrövidebb, illetve leghosszabb utak hosszát.

5. Egy irányított G gráfban hagyjuk el a forrásokat (olyan csúcsokat, amiknek a befoka 0), a maradék gráfban ismét hagyjuk el a forrásokat, és ezt ismételjük, amig lehet. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor kapunk üres gráfot, ha G-ben nincs irányított kör.

6. Döntsük el, hogy az alábbi gráf aciklikus-e és ha igen, adjuk meg egy topologikus sorrendjét, majd számítsuk ki az A csúcsból a többi csúcsba menő legrövidebb és leghosszabb utak hosszát.



7. Bizonyítsuk be, hogy minden $G = (V, E)$ hurokélmentes, irányított gráf felbontható két aciklikus gráfra; pontosabban az élhalmazának van olyan E_1, E_2 partíciója ($E = E_1 \cup E_2$ és $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), hogy a $G_1 = (V, E_1)$ és a $G_2 = (V, E_2)$ gráfok aciklikusak.

8. Éllistájával adott egy G irányított gráf, amiben nincsen irányított kör. Adott továbbá a gráf egy s csúcsa és szeretnénk meghatározni a gráf összes v csúcsa esetén az s-ből v-be vezető utak számát. Adjunk erre a feladatra $O(n + m)$ lépésszámú algoritmust.

9. Éllistával adott a súlyozott élű G gráf, ahol az élek súlyai az $1, 2, 3$ számok közül valók. Javasoljunk $O(n+m)$ költségű algoritmust egy adott s pontból az összes többi pontba vivő legrövidebb utak hosszának meghatározására.

10. Cirkuszi akrobaták egymás vállára állva minél nagyobb tornyot szeretnének létrehozni (a toronyban minden szinten csak egy akrobata lesz). Esztétikai és gyakorlati szempontok miatt egy ember vállára csak olyan állhat, aki nála alacsonyabb és könnyebb is. A cirkuszban n akrobata van, adott mindegyikük magassága és súlya.
    (a) Adjunk algoritmust, amely $O(n^2)$ lépésben megadja a lehetséges legtöbb emberből álló torony összeállítását.
    (b) Adjunk algoritmust, amely $O(n^2)$ lépésben megadja a lehetséges legmagasabb torony összeállítását.

11. Van b darab borítékunk, az i-ediknek a hossza h_i, a magassága m_i. Az i-edik borítékba akkor tudjuk berakni a j-edik borítékot, ha $h_j < h_i$ és $m_j < m_i$ is teljesül (nem forgatjuk és nem is hajtogatjuk a borítékokat). Célunk, hogy minél hosszabb olyan láncot alakítsunk ki, hogy az i-edikben benne van a j-edik, abban a k-adik, stb. Legyen adott egy $L > 0$ egész és a h_i és m_i számok. Adjunk hatékony algoritmust annak eldöntésére, hogy kialakítható-e a borítékokból egy L-hosszú lánc.

12. Egy adott időszakra több megbizatást is kaphatnánk. Mindegyik megbizatás olyan munkát jelent, ami néhány egymást követő napot foglal le. Adott, hogy melyik megbizatás melyik nap kezdődik és meddig tart. Továbbá adott mindegyikhez, hogy mennyi pénzt keresnénk vele. Adjunk hatékony algoritmust annak meghatározására, hogy legfeljebb mennyi pénzt kereshetünk úgy, hogy egy napon csak egyféle munkát tudunk elvégezni. (Fizetés az adott megbizatások teljes elvégzéséért jár csak.)

13. Egy falutörténet írója n korábbi lakosról gyűjtött információkat. A kérdésekre kapott válaszok a következő típusúak voltak:
    – S_i személy meghalt S_j születése előtt;
    – S_i személy élete során született S_j;
    – S_i személy korábban született, mint S_j;
    – S_i korábban halt meg, mint S_j.

    Egy S_i, S_j párra nem biztos, hogy szerepel minden választípus, és olyan pár is lehet, amely egyetlen válaszban sem szerepel együtt. Mivel az emberek időnként rosszul emlékeznek, nem biztos, hogy minden információ helyes. Adjunk hatékony algoritmust, amivel k darab fenti típusú válaszról eldönthető, hogy van-e közöttük ellentmondás.

14. Éllistával adott az n-pontú irányított $G = (V, E)$ gráf, melynek minden e éle egy $c(e) > 0$ élsúllyal van ellátva. Egy adott $s \in V$ csúcsból akarunk egy adott $t \in V$ csúcsba eljutni a legolcsóbb módon, de az út költségét a szokásostól eltérően számoljuk: ha az e él az út s-től számított k-adik éle, akkor $k \cdot c(e)$ költséggel járul hozzá az út költségéhez. Adjon algoritmust, amely meghatározza az ilyen értelemben vett legolcsóbb út költségét $O\big(n(n+m)\big)$ lépésben.

15. Van n fájlunk, az i-edik fájl hosszát jelölje a h_i, ahol $h_i \in \mathbb{Z}_+$. Mentéshez két egyformán L-méretű lemez áll rendelkezésünkre, ahol $L \in \mathbb{Z}_+$. A cél, hogy minél nagyobb k számra az első k darab fájl mindegyikét mentsük ki a lemezekre (a fájlok sorrendje rögzített). Fájlokat szétvágni nem szabad, minden fájl teljes egészében kerül az egyik vagy a másik lemezre. Adjunk $O(L^2)$ lépésszámú algoritmust, ami adott L és $h_1, \ldots, h_n$ számokhoz meghatározza, hogy melyik fájlt melyik lemezre tegyük ahhoz, hogy k a lehető legnagyobb legyen.

16. Egy városban 1000 ember lakik, ahol mindenki minden nap elmondja az ismerőseinek az összes előző nap megtudott hírt. Tudjuk, hogy olyan az ismeretségek hálózata, hogy előbb-utóbb mindenki megtud mindent. Bizonyítsuk be, hogy van 90 olyan ember, hogy ha ők egyszerre megtudnak valamit, akkor legkésőbb 10 nap múlva mindenki megtudja, valamint mutassuk példát olyan ismeretségi hálózatra, amikor 90-nél kevesebb ember nem elég ehhez.