Nyitott címzésű hash-elés, minimális költségű feszítőfák, P és NP

Algoritmuselmélet

9. gyakorlat

2024.

A P osztály.

Egy eldöntési problémát P-belinek nevezünk, ha létezik olyan, a bemenet méretében nézve polinomidejű algoritmus, amely minden bemenetre helyesen megválaszolja a kérdést.

Az NP osztály.

Egy eldöntési problémát NP-belinek nevezünk, ha minden olyan bemenethez, amelyre a válasz igenlő, létezik a bemenet méretében nézve polinomméretű tanú, melynek segítségével a bemenet méretében nézve polinomidőben leellenőrizhető, hogy a válasz valóban igen.

1. Nyitott címzéssel hash-elünk egy kezdetben üres $M = 11$ méretű táblába a $h(x) = x \pmod{M}$ hash-függvénnyel lineáris próbával. Mi lesz a tábla állapota az egyes lépések után, ha a 11, 9, 99, 7, 18 külcsokat ebben a sorrendben beszúrjuk, majd töröljük a 99-et és végül beszúrjuk a 33-at?
2. A hash-függvény legyen $f(x) = x \pmod{M}$ és a táblaméret $M = 7$. Helyezzük el a táblában a 9, 4, 17, 13, 3 kulcsokat ebben a sorrendben kvadratikus maradék próbálást használva az ütközések feloldására, majd töröljük a 17 kulcsot. Hol ér véget a KERES(10) művelet?
3. Egy 7-méretű hash-táblába a $h(x) = x \pmod{7}$ hash-függvénnyel szúrunk be elemeket. Az ütközéseket kettős hash-eléssel oldjuk fel a $h'(x) = 5 - \big(x \pmod{5}\big)$ másodlagos hash-függvény segítségével. A táblába a 19, 26, 38, 33, 31 elemeket szúrjuk be ebben a sorrendben. Adjuk meg a hash-tábla állapotát minden beszúrás után!
4. A $T[0 : M]$ táblában $2n$ elemet helyeztünk el az első $3n$ helyen ($3n < M$) egy ismeretlen hash-függvény segítségével. A táblában minden $3i$ indexű hely üresen maradt ($0 \le i < n$). Legfeljebb hány ütközés lehetett, ha az ütközések feloldására
   (a) lineáris próbálást,
   (b) kvadratikus maradék próbálást használtunk?
5. Előfordulhat-e nyílt címzéses hash esetén, hogy az $n > 3$ méretű táblában csak 3 elem van, de a keresés lépésszáma n?
6. A $b_0, \dots, b_n$ alakú $(n+1)$-hosszú bitsorozatokat akarjuk tárolni. Tudjuk, hogy a b_0 paritásbit (ami a sorozatban az egyesek számát párosra egészíti ki). Ha nyitott címzésű hash-elést használunk $h(x) = x \pmod{M}$ hash-függvénnyel és lineáris próbával, akkor $M = 2^n$ vagy $M = 2^n + 1$ méretű hash-tábla esetén lesz kevesebb ütközés?
7. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával (zárójelben az élsúlyok szerepelnek). Határozzunk meg egy minimális költségű feszítőfát G-ben Kruskal algoritmusával az ÚNIÓ-HOLVAN adatszerkezet felhasználva.

$\boldsymbol{a}$: $b\,(2)$, $c\,(3)$,	$\boldsymbol{b}$: $a\,(2)$, $d\,(2)$,	$\boldsymbol{c}$: $a\,(3)$, $d\,(1)$,
$\boldsymbol{d}$: $b\,(2)$, $c\,(1)$, $e\,(2)$, $f\,(4)$	$\boldsymbol{e}$: $d\,(2)$, $f\,(1)$, $g\,(2)$	$\boldsymbol{f}$: $d\,(4)$, $e\,(1)$, $g\,(2)$, $h\,(1)$
$\boldsymbol{g}$: $e\,(2)$, $f\,(2)$, $h\,(3)$	$\boldsymbol{h}$: $f\,(1)$, $g\,(3)$	

8. Adjunk algoritmust egy maximális súlyú feszítőfa megkeresésére.

9. Mátrixával adott egy város úthálózatának összefüggő, élsúlyozott, irányítatlan, gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy hány hómunkás tudja az adott útszakaszt letakarítani 1 óra alatt. Szeretnénk tudni, hogy legalább mennyi hómunkásra van szükség összesen ahhoz, hogy egy éjszakai hóesés után (ami reggel 6-kor elállt), a 7 órás munkakezdés után 1 órán belül a főtérről (ami egy csúcs a gráfban) a város összes csomópontja elérhető legyen letakarított úton. Adjunk $O(m \log n)$ lépésszámú algoritmust feladat megoldására, ahol n a csomópontok számát jelöli.

10. Éllistával adott a $G = (V, E)$ egyszerű, összefüggő gráf. A gráf élei súlyozottak, a súlyfüggvény $c\colon E \to \{-1, 1\}$. Adjunk algoritmust, ami G-ben $O\big(|V| + |E|\big)$ lépésben meghatározza, hogy mennyi a minimális súlya egy olyan részgráfnak, ami G minden pontját tartalmazza és összefüggő.

11. Mátrixával adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, melynek minden éléhez egy pozitív súly tartozik. A gráf minden csúcsa vagy egy raktárat vagy egy boltot jelképez, az élsúlyok a megfelelő távolságokat jelentik. Olyan G' részgráfját keressük G-nek, amely minden csúcsot tartalmaz, és amelyben minden bolthoz van legalább egy raktár, ahonnan oda tudunk szállítani (azaz van köztük út a gráfban). Adjunk $O(m \log n)$ lépésszámú algoritmust egy a feltételeknek megfelelő minimális összsúlyú G' részgráf megkeresésére.

12. A $G = (V, E)$ összefüggő, irányítatlan, súlyozott gráfban $|E| \leq |V| + 100$. Adjunk $O\big(|V|\big)$ lépésszámú algoritmust egy minimális feszítőfa meghatározására.

13. Éllistájával adott egy $G = (V, E)$ egyszerű, összefüggő, irányítatlan gráf, melynek éleihez csupa különböző súlyt rendeltünk. A gráfot úgy akarjuk felosztani k darab $G_1 = (V_1, E_1)$, $\ldots$, $G_k = (V_k, E_k)$ összefüggő részgráfra, hogy G minden csúcsa pontosan egy V_i-ben legyen benne. Egy ilyen felbontás értéke a különböző V_i csúcshalmazok között menő élek súlyai közül a legkisebb. Adjunk $O\big(|E| \log |E|\big)$ lépésszámú algoritmust, mely adott G és k esetén meghatároz egy maximális értékű felosztást.

14. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák P-beliek.
    (a) Bemenet: egy irányítatlan G gráf.
    Kérdés: kiszínezhető-e 2 színnel G?
    (b) Bemenet: egy 2CNF alakú φ Boole-formula.
    Kérdés: kielégíthető-e φ?

15. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák NP-beliek.
    (a) Bemenet: G és H irányítatlan gráfok.
    Kérdés: Izomorf-e G és H?
    (b) Bemenet: $s_1, s_2, \ldots, s_n$ és b pozitív egészek.
    Kérdés: van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, amelyre $\sum_{i \in I} s_i = b$?
    (c) Bemenet: egy 3CNF alakú φ Boole-formula.
    Kérdés: kielégíthető-e φ?