Kulcsmanipulációs rendezések, mélységi bejárás

Algoritmuselmélet

4. gyakorlat

2025.

Ládarendezés.

Ha az n darab rendezendő elem egy m-elemű halmazból kerül ki (pl. az $\{1, 2, \ldots, m\}$ halmazból), akkor a ládarendezés lépésszáma $O(m + n)$.

Radixrendezés.

Ha az n darab rendezendő elem mindegyike k komponensből áll, és tetszőleges $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ esetén az i-edik komponensek egy m_i-elemű halmazból kerülnek ki, akkor a radixrendezés lépésszáma $O\left(kn + \sum_{i=1}^{k} m_i\right)$.

Mélységi bejárás (DFS).

A mélységi bejárás lépésszáma

- $O(n + m)$, ha a gráf éllistával adott,
- $O(n^2)$, ha a gráf szomszédossági mátrixszal adott.

1. Rendezzük a *cab*, *abb*, *cca*, *bcb*, *cbc*, *aac*, *bac* elemeket radix rendezéssel.

2. Vázoljunk egy $O(n)$ időigényű algoritmust n olyan egész számból álló sorozat rendezésére, melynek elemei az
   (a) $\{1, \ldots, 3n\}$ tartományba esnek;
   (b) $\{1, \ldots, n^7 - 1\}$ tartományba esnek.

3. Adott egy $n \times n$-es mátrix. Adjunk $O(n^2 \log n)$ összehasonlítást használó algoritmust, amely eldönti, van-e két olyan sor, amelyeknek az első oszlopbeli elemei különböznek, viszont az összes többi oszlopban megegyeznek.

4. Adjunk $O(n + m)$ lépésszámú algoritmust, amely egy éllistával adott G irányított gráfban meghatározza a csúcsok ki- és befokát.

5. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, amely egy szomszédossági mátrixszal adott G irányítatlan gráfban meghatározza, hogy
   (a) van-e másodfokú csúcs a gráfban;
   (b) melyik a legnagyobb fokszám a gráfban;
   (c) melyik a leggyakoribb fokszám a gráfban.

6. Éllistájukkal adottak az alábbi G_1 és G_2 irányított gráfok.

   G_1: **a**: b, c, d **b**: d **c**: d **d**: e **e**: a

   G_2: **a**: f, g **b**: a, g **c**: - **d**: - **e**: c, d **f**: e **g**: e, f

   (a) Keressünk a G_1 és G_2 gráfokban egy-egy mélységi feszítőerdőt.
   (b) Adjuk meg a csúcsok mélységi és befejezési számát is.

7. A 6-pontú, irányított G gráf csúcsait jelölje x, y, z, u, v, w. A gráf egy mélységi bejárásánál a mélységi, illetve a befejezési számok a következők.

$$x\colon 1,6; \qquad y\colon 2,4; \qquad z\colon 6,5; \qquad u\colon 3,3; \qquad v\colon 4,1; \qquad w\colon 5,2$$

(a) Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit.

(b) Legfeljebb mennyi lehet az y csúcs be-, illetve kifoka a G gráfban (feltéve, hogy a gráfban nincsenek hurokélek, illetve többszörös élek)?

(c) Oldjuk meg a feladatot abban az esetben is, ha G irányítatlan.

8. Egy $2k \geq 4$ csúcsú egyszerű, irányítatlan gráf mélységi bejárása során azt tapasztaltuk, hogy minden csúcsra a befejezési és a mélységi szám különbsége kisebb, mint k. Bizonyítsuk be, hogy a gráf nem összefüggő és minden komponensben legfeljebb k csúcs van.

9. Egy éllistával adott irányított G gráfban mindegyik csúcs színes: vagy piros vagy zöld, és ez az információ egy, a csúcsokkal indexelt C tömbben adott). Adott továbbá a gráfban két piros csúcs, s és t.

   (a) Adjunk $O(n+m)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy van-e az s-ből t-be olyan út, ami csak piros csúcsokon megy át.

   (b) Adjunk $O\big(n(n+m)\big)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy van-e az s-ből t-be olyan út, ami legfeljebb egy zöld csúcson megy át.

   (c) Adjunk a b) feladatra $O(n+m)$ lépésszámú algoritmust.

10. Adjunk algoritmust, mely egy éllistával megadott irányítatlan gráfban vagy talál egy kört, vagy igazolja a gráf körmentességét $O(n)$ időben.

11. Egy kezdő autóvezető a városban való közlekedése során szeretne gyakorlatának megfelelő útvonalat választani. Az úthálózat egy irányítatlan gráfként van megadva: a csúcsok a kereszteződések, az élek az utak, valamint a csúcsoknál adott, hogy nehéz-e számára az a kereszteződés. (Az hogy nehéz, a kereszteződés tulajdonsága és nem azon múlik, hogy merről érkezik oda és merre akar rajta áthaladni.) Adjunk algoritmust, amivel meg lehet határozni, hogy az autós az egyik adott csúcsnál lévő otthonából mely csúcsokba tud autóval úgy eljutni, hogy útja során két nehéz csúcs soha nem jön közvetlenül egymás után. Az algoritmus lépésszáma éllistás megadás esetén legyen $O(n+m)$.

12. Az éllistával adott egy összefüggő, irányított G gráf, melynek minden éle az $1, 2, \ldots, k$ egész számok valamelyikével van súlyozva. Egy út értéke legyen az úton található élek súlyainak maximuma. Adott a gráf két csúcsa, x és y. Adjunk $O(m \log k)$ lépésszámú algoritmust annak meghatározására, hogy mennyi a lehető legkisebb értékű x-ből y-ba vezető út értéke.

13. Éllistával adott egy irányított G gráf. A gráf minden csúcsához hozzá van rendelve egy 1 és 100 közötti egész szám, azaz egy címke (természetesen több csúcsnak is lehet ugyanaz a címkéje). Találjunk (ha létezik) olyan utat a gráfban, amelyben minden címke pontosan egyszer fordul elő. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n+m)$.

14. A legalább 3-csúcsú G irányítatlan gráfnak az összes mélységi feszítőfája egy, a gyökérből induló Hamilton-út. Bizonyítsuk be, hogy G kétszeresen pontösszefüggő (azaz legalább három csúcsa van és bárhogyan hagyunk el belőle legfeljebb egy csúcsot, még összefüggő marad).