

Dinamikus programozás

ALGORITMUSELMÉLET

6. gyakorlat

2025.

1. A $b_1, b_2, \dots, b_n$ sorozat különböző nemnegatív egészekből áll. Szeretnénk meghatározni a legnagyobb összeget a monoton növekvő részsorozatok körében. Például ha a sorozat a 2, 1, 10, 6, 3, 8, 4, 9, akkor a legnagyobb összeg 25, amit a 2, 6, 8, 9 részsorozatnál érünk el. Adjunk $O(n^2)$ futásidejű algoritmust, ami megtalálja a legnagyobb elérhető összeg értékét.
2. Egy $(n \times n)$ -méretű táblázat mezőin lépkedünk a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba úgy, hogy egy lépésben a táblázatban vagy felfelé vagy jobbra egyet lépünk, de van néhány „tiltott” mező, ahova nem léphetünk. Adjunk egy dinamikus programozást használó eljárást, ami meghatározza, hogy hányféleképpen érhetünk célba. Mi az algoritmus lépésszáma?
3. Egy f -fokú létrán bizonyos fokok annyira rozogák, hogy ha rálépünk, leszakadnak. Szerencsére tudjuk, hogy melyik fokok ilyenek, hova nem szabad lépniük. Tegyük fel, hogy a legfelső fokra rá szabad lépni. Egy lépéssel legfeljebb 3 fokot tudunk lépni. Adjunk dinamikus programozást használó algoritmust, ami meghatározza, hogy
 - (a) a létra aljától fel tudunk-e jutni a létra legfelső fokára;
 - (b) a létra aljától hányféleképpen tudunk feljutni a létra legfelső fokára.Mennyi az algoritmusok lépésszáma?
4.
 - (a) Adott $n + 1$ darab ($n \geq 1$) pozitív egész szám: $s_1, s_2, \dots, s_n, b$ és azt szeretnénk eldönteni, hogy előáll-e a b szám néhány s_i szám összegeként. (Mindegyik s_i szám legfeljebb egyszer használható fel az összegben.) Adjunk dinamikus programozást használó $O(n \cdot b)$ lépésszámú algoritmust erre a feladatra (melynek neve Részhalmaz-összeg probléma, röviden RH).
 - (b) Adjunk algoritmust arra az esetre is, ha azt is meg akarjuk határozni, hogy hányféleképpen áll elő a b szám az elvárt alakban.
5. Egy n és egy m karakterből álló szövegben meg akarjuk találni a legnagyobb azonos darabot, azaz ha az egyik szöveg $a_1 a_2 \dots a_n$ és a másik $b_1 b_2 \dots b_m$, akkor olyan $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$ indexeket keresünk, hogy $a_{i+1} = b_{j+1}, a_{i+2} = b_{j+2}, \dots, a_{i+t} = b_{j+t}$ teljesüljön a lehető legnagyobb t számra. Adjunk erre a feladatra $O(mn)$ lépést használó algoritmust.
6. Az $1, 2, \dots, n$ számoknak adott két permutációja, $x_1, \dots, x_n$ és $y_1, \dots, y_n$. A két sorozat egy közös részsorozata egy $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, és egy $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ indexsorozattal adható meg, ahol $x_{i_m} = y_{j_m}$ teljesül minden $1 \leq m \leq k$ esetén. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami az x és y sorozatokban meghatároz egy leghosszabb közös részsorozatot.
7. Egy w méter széles folyón szeretnénk átkelni a folyó medrébe lerakott n darab cölöp segítségével. A cölöpök a folyó két partja között, a folyó partjára merőleges egyenes vonalban helyezkednek el, $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < w$ méterre a kiindulási parttól (w és az összes x_i távolság egész szám). Az első lépésben egy métert ugorhatunk, utána pedig az igaz, hogy minden ugrás vagy pontosan egy méterrel nagyobb, vagy pontosan egy méterrel kisebb, vagy ugyanakkora, mint az előző (minden ugrás előre felé történik). Adjunk algoritmust, ami az x_i számok ismeretében $O(nw)$ lépésben eldönti, hogy át tudunk-e jutni a túlsó partra anélkül, hogy a vízbe esnénk. (Nem szükséges pontosan megérkeznünk a túlsó partra.)

8. Zárthelyit szervezünk, amin összesen H hallgató fog részt venni, és ehhez T darab terem áll rendelkezésünkre. Tudjuk, hogy az i -edik terembe h_i hallgató fér be. de lehet benne kevesebb is; $\sum h_i \geq H$. A terem geometriája, oszlopok, stb. miatt ha az i -edik terembe kerül zh-t író hallgató, akkor itt f_i fő zh-felügyelőre van szükségünk. (Tegyük fel, hogy f_i független a terembe ténylegesen kerülő hallgatók számától, feltéve, hogy ez legalább egy fő.) Adjunk dinamikus programozást használó algoritmust, amivel $O(T \cdot H)$ lépésben meghatározható, mely termeket használjuk a T közül ahhoz, hogy elég legyen a hely a hallgatóknak, de az összesen szükséges teremfelügyelők száma minimális legyen.
9. Egy n hosszú 0–1 sorozatot olyan, legalább 4-hosszú darabokra kell szétvágni, hogy minden keletkeztetett részben az első két bit megegyezzen az utolsó két bittel. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú, dinamikus programozást használó algoritmust, amely eldönti, hogy van-e ilyen szétvágás.
10. (a) Adjunk dinamikus programozást használó algoritmust, ami egy n egész számhoz, mint bemenethez $O(n)$ lépésben kiszámolja F_n -et, azaz az n -edik Fibonacci-számot. A Fibonacci számok sorozatát az alábbi rekurzióval definiáljuk: $F_0 = F_1 = 1$ és tetszőleges $n \geq 2$ esetén $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
- (b) Tekintsük azt a rekurzív algoritmust F_n , azaz az n -edik Fibonacci-szám kiszámolására, ami az $n = 0$ és $n = 1$ esetben 1-et ad vissza, tetszőleges $n \geq 2$ esetén pedig meghívja saját magát $n - 1$ és $n - 2$ inputtal, majd visszaadja az így kapott két érték összegét. Lássuk be, hogy ennek az eljárásnak a lépésszáma $\Omega(2^{n/2})$.