Sajátértékek, sajátvektorok; Komplex számok

Bevezetés a számításelméletbe 1.
10. gyakorlat

2013. november 19.

Def. Legyen $\mathcal{A} : V \to V$ egy lineáris transzformáció, $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. A $\underline{v}$ vektort az $\mathcal{A}$ transzformáció λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorának nevezzük, ha $\mathcal{A}(v) = \lambda\underline{v}$.
A λ sajátértékhez tartozó sajátaltér $\{\underline{v} \in V | \mathcal{A}(v) = \lambda\underline{v}\}$.
Def. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. A $\underline{v}$ vektort az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorának nevezzük, ha $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$.

Def. A z komplex szám kanonikus alakja: $z = a + bi$. z valós része $\mathrm{Re}(z) = a$, képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.
Def. A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
Áll. Legyen $z, w \in \mathbb{C}$. Ekkor $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
Def. A $z = a + bi$ komplex szám abszolútértéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Def. A z komplex szám trigonometrikus alakja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r = |z|$ és φ a komplex számsíkon ábrázolt z vektornak a valós tengely pozitív felével bezárt szöge.
Áll. Tetszőleges $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ komplex számok esetén

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \text{ ha } z_2 \neq 0.$$

Def. Az ε komplex számot n-edik egységgyöknek nevezzük, ha $\varepsilon^n = 1$.

1. Mik a sajátértékei az alábbi mátrixnak?
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Határozzuk meg az
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltereket!

3. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi A mátrixnak a 0 sajátértéke legyen! A kapott mátrixnak keressük meg a többi sajátértékét is és a legnagyobb sajátértékhez keressünk egy sajátvektort!
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$$

4. Az alábbi A mátrixról tudjuk, hogy a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ vektor sajátvektora.

   (a) Határozzuk meg a p paraméter értékét!

   (b) Határozzuk meg A összes sajátértékét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & p \end{pmatrix}$$

5. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformációnak a $\lambda = -1$ sajátértéke. Igaz-e, hogy a $\lambda = -1$ az $\mathcal{A}^3$ transzformációnak is sajátértéke?

6. Legyen $\mathcal{A} : V \to V$ egy lineáris transzformáció, és legyen $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ a V tér egy bázisa. Tegyük fel, hogy b_1 a $\lambda_1 = 1$, b_2 a $\lambda_2 = 2$ és b_3 a $\lambda_3 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektora az $\mathcal{A}$ transzformációnak. Határozzuk meg az $\mathcal{A}^2$ lineáris transzformáció B bázishoz tartozó mátrixát! (Az $\mathcal{A}^2$ lineáris transzformációt az $\mathcal{A}^2(v) := \mathcal{A}(\mathcal{A}(v))$ formula definiálja.)

7. Tegyük fel, hogy valamely $\mathcal{A}$ lineáris transzformációnak az u, v és $u+v$ vektorok egyaránt sajátvektorai. Mutassuk meg, hogy ekkor e három sajátvektor ugyanahhoz a sajátértékhez tartozik.

8. Végezzük el az alábbi műveleteket!

   (a) $(3+2i)^2$ (b) $\dfrac{1+17i}{3+i}$ (c) $\sqrt[5]{-1000}$

9. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében!

   (a) $z^2 - iz + 2 = 0$;

   (b) $2(z + \overline{z}) = |z|$;

   (c) $z(1+i) - \overline{z}(1-i) = 2i$.

10. Írjuk fel a $\sin(4\alpha)$-t és $\cos(4\alpha)$-t!

11. (a) Mennyi az n-edik egységgyökök összege?

    (b) Mennyi az n-edik egységgyökök szorzata?

12. Hány 12. egységgyök van a komplex 8. egységgyökök között?

13. Végezzük el az alábbi műveleteket! Az eredményt adjuk meg kanonikus és trigonometrikus alakban is!

    (a) $\left(2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^6$;

    (b) $\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{10}$;

    (c) $(-2+2i)^8$;

    (d) $\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$.