Gyakorlás

Bevezetés a számításelméletbe 1.
11. gyakorlat

2013. november 26.

1. Egy $n \times n$-es A mátrix minden eleme páros egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha A-nak van inverze, akkor A^{-1}-nek legalább n darab eleme törtszám (vagyis nem egész szám)!

2. Bizonyítsuk be, hogy minden mátrixra igaz, hogy kibővíthető egy sorral és egy oszloppal úgy, hogy az így keletkező új mátrix rangja nagyobb legyen, mint az eredetié.

   Lássuk be azt is, hogy csak egy sorral vagy csak egy oszloppal való bővítés általában nem elegendő a fentiekhez, vagyis csak egy sorral vagy csak egy oszloppal bővítve egy mátrixot nem mindig növelhető annak rangja.

3. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere és legyen $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció. Az $\mathcal{A}$ mátrixa a $\underline{b}_1 = (1, 0)$ és $\underline{b}_2 = (1, 1)$ vektorokból álló bázisban felírva az alábbi:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}.$$

   Tudjuk továbbá, hogy valamely y értékre $\mathcal{A}$ az $(y, 3)$ vektorhoz önmagát rendeli. Határozzuk meg x értékét!

4. Legyen adott az $\mathcal{A} : V \to W$ lineáris leképezés és a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázis V-ben, valamint a $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_m\}$ bázis W-ben. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathcal{A}$ leképezés B és C bázisok szerint felírt mátrixának minden sorában az elemek összege 1, akkor $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_m \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$.

5. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ a V vektortér lineáris transzformációi, és tegyük fel, hogy $\operatorname{Im} \mathcal{B} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$. A V tér tetszőleges v vektorára definiálja $\mathcal{C}(v) := \mathcal{A}(\mathcal{B}(v))$ a $\mathcal{C}$ lineáris transzformációt. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{Ker} \mathcal{C} = \operatorname{Ker} \mathcal{B}$.

6. Legyenek U és V rendre az $(n + 1) \times n$ ill. $n \times (n - 1)$ méretű valós mátrixok alkotta vektorterek a szokásos műveletekre nézve, és legyen $\mathcal{A} : U \to V$ egy lineáris leképezés. Bizonyítsuk be, hogy $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} \geq 2n$.

7. Legyen V egy n-dimenziós vektortér és $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció. Tegyük fel, hogy a tér $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorai lineárisan függetlenek és $\mathcal{A}(\underline{v}_1) = \mathcal{A}(\underline{v}_2) = \ldots = \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy ekkor bárhogy választunk a térben $n - k + 2$ darab vektort – jelölje ezeket $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_{n-k+2}$ –, az $\mathcal{A}(\underline{w}_1), \mathcal{A}(\underline{w}_2), \ldots, \mathcal{A}(\underline{w}_{n-k+2})$ vektorok mindig lineárisan összefüggők lesznek.

8. Legyenek A és B $n \times n$-es mátrixok és tegyük fel, hogy B-nek van inverze. Bizonyítsuk be, hogy ha a λ valós szám sajátértéke A-nak, akkor sajátértéke $B^{-1} \cdot A \cdot B$-nek is!

9. Mutassuk meg, hogy ha A olyan négyzetes mátrix, amire $A^2 = A$, akkor A-nak minden sajátértéke 0-val vagy 1-gyel egyenlő.

10. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Mutassuk meg, hogy ekkor $\underline{u} + \underline{v}$ nem sajátvektora $\mathcal{A}$-nak!

11. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai és legyen $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció. Bizonyítsuk be, hogy ha $\underline{v}_1 + \mathcal{A}(\underline{v}_1), \underline{v}_2 + \mathcal{A}(\underline{v}_2), \ldots, \underline{v}_k + \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor $\mathcal{A}$-nak a (-1) sajátértéke!