Vektortér, altér, generátorrendszer

Bevezetés a számításelméletbe 1.
2. gyakorlat

2012. február 15.

Vektortér: A V halmazt $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek nevezzük, ha
$\forall u, v, w \in V$:
(ö1) $u + (v + w) = (u + v) + w$
(ö2) $u + v = v + u$
(ö3) $\exists 0 \in V\ \forall v \in V:\ v + 0 = v$
(ö4) $\forall v \in V\ \exists -v \in V : v + (-v) = 0$

$\forall \lambda, \kappa \in \mathbb{R},\ \forall v, u \in V$:
(sz1) $(\lambda + \kappa)v = \lambda v + \kappa v$
(sz2) $\lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u$
(sz3) $(\lambda\kappa)v = \lambda(\kappa v)$
(sz4) $1v = v$

Megj. V-nek zártnak kell lennie az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve.

Altér: A $W \subseteq V$ részhalmaz a V valós vektortér altere, ha W is valós vektortér a V vektortér műveleteire.

Áll. Ha V vektortér, akkor $\emptyset \neq W \subseteq V$ pontosan akkor altere V-nek, ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve.

Áll. Legyen V vektortér és $U \subseteq V$. Ekkor azok a vektorok, amelyek előállnak véges sok U-beli vektor lineáris kombinációjaként, alteret alkotnak V-ben. Ez az U által generált altér.
Jele: $< U >$.

1. Vektorteret alkotnak-e az alábbi halmazok a szokásos összeadásra nézve a valós számok teste felett?

   (a) racionális számok

   (b) a legfeljebb n-edfokú egyváltozós polinomok

   (c) a folytonos függvények ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

   (d) a deriválható függvények ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

   (e) páros függvények ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

   (f) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(5) \leq 0\}$

   (g) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(5) = f(8)\}$

   (h) azok a legfeljebb hatodfokú polinomok, melyeknek egyik gyöke a $\sqrt{2}$

2. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Legyen V-n a $\oplus$ művelet a síkvektorok hagyományos összeadása; értelmezzük továbbá tetszőleges $\underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\odot$ szorzást az alábbiak szerint:
$$\lambda \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix}.$$
Vektorteret alkot-e V az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

3. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Tetszőleges $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in V$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\oplus$ összeadást és a $\odot$ szorzást az alábbiak szerint:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \end{pmatrix}, \quad \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda \cdot y_1 \end{pmatrix}.$$
Vektorteret alkot-e V az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

4. Döntsük el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_3 = 0 \right\}$

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_2 = 1 \right\}$

5. A valós számhármasok vektorterében alteret alkotnak-e azok az $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ vektorok, melyekre $x_1 = 2x_2 - 3x_3$?

6. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok generátorrendszert alkotnak a V vektortérben. Legyen továbbá $\underline{u} \in V$ a nullvektortól különböző tetszőleges vektor. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $1 \leq i \leq n$, amelyre a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{u}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok szintén generátorrendszert alkotnak!

7. A V vektortérbeli $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorokról tudjuk, hogy az összegük a nullvektor. Bizonyítsuk be, hogy $< \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{n-1} > = < \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n >$!

8. Döntsük el, hogy igaz-e az $\underline{a} \in < \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} >$ állítás az $\underline{a}, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra, ahol
$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$