Sajátértékek, sajátvektorok

Bevezetés a számításelméletbe 1.
9. gyakorlat

2012. április 4.

Def. Legyen $\mathcal{A} : V \to V$ egy lineáris transzformáció, $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. A $\underline{v}$ vektort az $\mathcal{A}$ transzformáció λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorának nevezzük, ha $\mathcal{A}(v) = \lambda\underline{v}$.
A λ sajátértékhez tartozó sajátaltér $\{\underline{v} \in V | \mathcal{A}(v) = \lambda\underline{v}\}$.
Def. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. A $\underline{v}$ vektort az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorának nevezzük, ha $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$.

1. Mik a sajátértékei az alábbi mátrixnak?
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Határozzuk meg az
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltereket!

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és a legnagyobb sajátértékhez keressünk egy sajátvektort!
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Adjuk meg p összes lehetséges olyan értékét, amire az alábbi mátrixnak két különböző sajátértéke van! Számítsuk is ki a sajátértékeket $p = 6$ esetén!
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & -3 \end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi A mátrixnak a 0 sajátértéke legyen! A kapott mátrixnak keressük meg a többi sajátértékét is és a legnagyobb sajátértékhez keressünk egy sajátvektort!
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$$

6. Az alábbi A mátrixról tudjuk, hogy a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ vektor sajátvektora.

(a) Határozzuk meg a p paraméter értékét!

(b) Határozzuk meg A összes sajátértékét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & p \end{pmatrix}$$

7. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformációnak a $\lambda = -1$ sajátértéke. Igaz-e, hogy a $\lambda = -1$ az $\mathcal{A}^3$ transzformációnak is sajátértéke?

8. Legyen $\mathcal{A} : V \to V$ egy lineáris transzformáció, és legyen $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ a V tér egy bázisa. Tegyük fel, hogy b_1 a $\lambda_1 = 1$, b_2 a $\lambda_2 = 2$ és b_3 a $\lambda_3 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektora az $\mathcal{A}$ transzformációnak. Határozzuk meg az $\mathcal{A}^2$ lineáris transzformáció B bázishoz tartozó mátrixát! (Az $\mathcal{A}^2$ lineáris transzformációt az $\mathcal{A}^2(v) := \mathcal{A}(\mathcal{A}(v))$ formula definiálja.)

9. Tegyük fel, hogy valamely $\mathcal{A}$ lineáris transzformációnak az u, v és $u+v$ vektorok egyaránt sajátvektorai. Mutassuk meg, hogy ekkor e három sajátvektor ugyanahhoz a sajátértékhez tartozik.