Sajátértékek, sajátvektorok, kongruenciák

Bevezetés a számításelméletbe 1
10. gyakorlat

2015. november 10.

Sajátérték, sajátvektor

Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix.

(i) A $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárt az A sajátértékének nevezzük, ha létezik olyan $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor, amelyre $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ teljesül.

(ii) A $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektort az A sajátértékének nevezzük, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, amelyre $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ teljesül.

Tétel

Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix. A $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$.

1. Mik a sajátértékei az alábbi mátrixnak?

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. (a) Sajátvektora-e az alábbi $\underline{v}$ vektor az alábbi A mátrixnak?

   (b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét és az összes, ehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektort.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

3. A p valós paraméter minden értékére adjuk meg az alábbi mátrix minden sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez tartozó minden sajátvektort.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ p & 4 & p \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Az $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya

$$f:\ (x, y, z) \mapsto (0, 3x + 4y + z, 6x + 2y + 5z).$$

   (a) Adjuk meg az $[f]$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

(b) Van-e $\mathbb{R}^3$-ben olyan B bázis, amire az $[f]_B$ mátrix diagonális (vagyis a főátlóján kívül minden elem nulla)? Ha igen, adjunk meg egy ilyen B-t és írjuk fel $[f]_B$-t.

5. A sík egy lineáris transzformációja a $(2,1)$ vektorhoz az $(1,1)$ vektort rendeli, az $(1,1)$ vektorhoz pedig a $(2,1)$ vektort. Határozzuk meg a transzformáció egy sajátvektorát és a hozzá tartozó sajátértéket.

6. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egy lineáris transzformáció különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy $\underline{u}+\underline{v}$ is sajátvektora ugyanannak a transzformációnak?

7. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ az f lineáris transzformáció különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy $\underline{u}+\underline{v}$ sajátvektora f^2-nek?

8. Legyen $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és B egy bázis $\mathbb{R}^n$-ben.

   (a) Mutassuk meg, hogy az $[f]$ és az $[f]_B$ mátrixok sajátértékei azonosak.

   (b) Igaz-e, hogy az $[f]$ és az $[f]_B$ karakterisztikus polinomjai is megegyeznek?

9. Milyen maradékot ad

   (a) 70^{70} 23-mal osztva;

   (b) 55^{100} 48-cal osztva;

   (c) 1025^{1005} 1023-mal osztva?

10. Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciákat!

    (a) $3x \equiv 2 \pmod 5$

    (b) $32x \equiv 12 \pmod{82}$

    (c) $5x \equiv 1 \pmod{28}$

    (d) $170x \equiv 78 \pmod{2006}$

11. Egy egész szám 109-cel vett osztási maradéka 5-tel kisebb, mint a szám 18-szorosának a 109-cel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 109-cel osztva?

12. Az n pozitív egész számra $43n-1$ utolsó két számjegye megegyezik $2n+2$ utolsó két számjegyével. Mi ez a két számjegy?

13. Egy egész számra teljesül, hogy $37n+9$ és $n+10$ azonos maradékot ad 235-tel osztva. Mi lehet ez a közös maradék?