

# Számosságok

## Bevezetés a számításelméletbe 1

### 13. gyakorlat

2015. december 8.

1. Mutassuk meg, hogy az 561 Carmichael-szám.
2. Az angol ABC betűit a  $0, 1, \dots, 25$  számok kódolják:  $A = 0, B = 1, \dots, Z = 25$ . Sikerült elfogni az RSA titkosítással kódolt  $59, 2, 59, 20, 44, 52$  üzenetet, amit az oktondi feladó betűnként kódolt a címzett  $(85, 43)$  nyilvános kulcsával. Törjük fel a kódot, fejtsük meg az üzenetet.
3. Egy lakattal lezárható ládában szeretnénk titkokat küldeni az ismerősünknek. Sajnos azonban a postás minden olyan küldeményt felnyit, amit csak tud, és amit abban talál, azt ellopja vagy lemásolja. Mindkettőnknek van lakatunk, megfelelő kulcsokkal, de egyikünk sem rendelkezik olyan kulccsal, amihez való lakat a másikinál van. Hogyan oldható meg a biztonságos csomagküldés?
4. Döntsük el az alábbi  $f : X \rightarrow Y$  függvényekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.
  - (a)  $X = Y = \{A, B, E, G, L, R\}$ ,  $f$  minden betűhöz az ALGEBRA szóban utána következő betűt rendeli.
  - (b)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad x \mapsto 2x$ .
  - (c)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \quad x \mapsto |x|$ .
5. Döntsük el, hogy  $|A| = |B|$  teljesül-e az alábbi halmazokra.
  - (a)  $A$  a pozitív prímszámok,  $B$  a pozitív összetett számok halmaza.
  - (b)  $A = ]0, \infty[$ ,  $B = \mathbb{R}$ .
  - (c)  $A = [0, \infty[$ ,  $B = \mathbb{R}$ .
  - (d)  $A = ]0, 1[$ ,  $B = \mathbb{R}$ .
6. Mi a számossága annak a számhalmaznak, melynek elemei azok a számok, melyek felírhatók  $a + b\sqrt{k}$  alakban úgy, hogy  $k$  pozitív egész,  $a$  és  $b$  pedig racionális számok?
7. Mennyi az olyan végtelen hosszú  $0 - 1$  sorozatok halmazának számossága, melyekben pontosan 5 darab egyes fordul elő?
8. Hány olyan (végtelen hosszú) számtani sorozat van, amelynek minden eleme pozitív egész szám? (Vagyis, mi a számossága az ezen számtani sorozatokat tartalmazó halmaznak?)
9. A  $H$  halmaz álljon az összes olyan, az  $a$  és  $b$  betűkből készített, végtelen hosszú sorozatokból, amelyekben minden  $n$  pozitív egészhez található  $n$  darab szomszédos  $b$  betű. Határozzuk meg  $H$  számosságát!