Bázis, dimenzió

Bevezetés a számításelméletbe 1
3. gyakorlat

2015. szeptember 22.

F-G egyenlőtlenség

Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$ altér, $\{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq V$ lineárisan független rendszer, $\{\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m\} \subseteq V$ pedig V egy generátorrendszere. Ekkor $k \leq m$.

Bázis

A $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ vektorrendszer a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa, ha lineárisan független és egyúttal V generátorrendszere.

Tétel

Ha egy $V \leq \mathbb{R}^n$ altérnek van k-elemű bázisa, akkor minden bázisa k-elemű.

Dimenzió

A $V \leq \mathbb{R}^n$ vektortér dimenziója k, ha V-nek van k-elemű bázisa (ekkor V összes bázisa k-elemű).

Tétel

A $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k\}$ vektorrendszer pontosan akkor bázisa a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérnek, ha minden $\underline{v} \in V$ vektor egyértelműen áll elő a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Koordinátavektor

Legyen $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér egy bázisa és $\underline{v} \in V$ egy tetszőleges vektor. Azt mondjuk, hogy a $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$ vektor a $\underline{V}$ vektor B szerinti koordinátavektora, ha $\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{b}_k$. Jelölése:

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Tétel

Egy $V \leq \mathbb{R}^n$ altér tetszőleges $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k\}$ vektorrendszere esetén az alábbiak egymással ekvivalensek.

i. $\mathcal{B}$ bázis.

ii. $\mathcal{B}$ maximálisan független.

iii. $\mathcal{B}$ minimális generátorrendszer.

1. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e?
   (a) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független.
   (b) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{d}$ lineárisan független.
   (c) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$.
   (d) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ generátorrendszer.
   (e) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ bázis.

2. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ alábbi alterének egy bázisát:
$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 3x + 2y + z = 0 \right\}.$$

3. Tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}^n$ térnek a $H = \{a, b, c, d, e, f\}$ részhalmaza rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy H bármely 3-elemű X részhalmazára X és $H \setminus X$ ugyanazt az alteret generálja. Igazoljuk, hogy ha $\{a, b, c\}$ lineárisan független vektorok, akkor H-nak bármely 3 vektora lineárisan független.

4. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^{99}$ tér két 50-dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme!

5. Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \ldots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ és $\underline{v}_2 + \underline{v}_4 + \underline{v}_6 + \ldots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ teljesül a V vektortér $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektoraira. Jelöljük a $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100} \rangle$ generált alteret W-vel. Bizonyítsuk be, hogy $\dim W \leq 98$.

6. Legyen
$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 36 \\ p \end{pmatrix}.$$
   A p paraméter milyen értékére igaz a $\underline{v} \in \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$ állítás? A p ezen értékére határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort, ahol $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$.