Permutációk, determináns

Bevezetés a számításelméletbe 1
5. gyakorlat

2015. október 6.

Permutáció

A $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ n-tagú számsorozatot permutációnak nevezzük, ha az $1, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az n-edfokú permutációk halmazát S_n jelöli.

Inverzió

A $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ permutációban a π_i és a π_j tagok inverzióban állnak, ha $i < j$, de $\pi_i > \pi_j$. A π permutáció inverziószáma az összes inverzióban álló számpárok száma. Ennek jele $I(\pi)$.

Determináns

Az $n \times n$-es A mátrix determinánsának a $\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}$ értéket nevezzük.

Tétel

Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

i. $\det(A) = \det(A^T)$.

ii. Ha A felső/alsó háromszögmátrix, akkor $\det(A)$ a főátlóbeli elemek szorzata.

iii. Ha A egy sora/oszlopa csupa nulla, akkor $\det(A) = 0$.

iv. Ha A egy sorát/oszlopát λ-val végigszorozzuk, akkor a determináns is λ-val szorzódik.

v. Ha A két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.

vi. Ha A két sora/oszlopa megegyezik, akkor $\det(A) = 0$.

vii. Ha A egy sorának/oszlopának λ-szorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz/oszlophoz, akkor a determináns nem változik.

Tétel

Legyenek A, B, C $n \times n$-es mátrixok és legyen $i \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges. Ha az A, B, C mátrixok az i-edik sorukat leszámítva megegyeznek, valamint a C mátrix sora éppen az A és a B mátrix i-edik sorának a tagonkénti összege, akkor $\det C = \det A + \det B$.

1. Határozzuk meg az alábbi permutációk inverziószámát!
   (a) $(1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$ (b) $(n, n-1, \dots, 2, 1)$
   (c) $(21, 22, \dots, 30, 11, 12, \dots 20, 1, 2, \dots, 10)$

2. Legyen σ az $1, 2, \dots, 100$ számok egy permutációja, és legyen σ' az a permutáció, amire $\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) + 1, & \text{ha } 1 \leq \sigma(i) \leq 99, \\ 1, & \text{ha } \sigma(i) = 100. \end{cases}$ Igazoljuk, hogy a σ és σ' permutációk $I(\sigma)$ és $I(\sigma')$ inverziószámai ellenkező paritásúak.

3. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét!

a) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 6 & 12 & 20 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$

4. A jobbra látható determináns definíció szerinti kiszámításakor
   (a) hány nemnulla szorzat keletkezik;
   (b) milyen előjelet kap az a szorzat, amelynek az egyik tényezője 3?

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

5. Legyen A olyan 40×40 méretű mátrix, aminek a bal felső 18×23-as részmátrixában csupa 0 áll. Bizonyítsuk be, hogy $\det A = 0$.

6. Legyen A egy nem 0 determinánsú, 9×9-es mátrix, A' pedig az a mátrix, amit A-ból az első sor λ-val való szorzásával kapunk. Mennyi lehet λ értéke, ha tudjuk, hogy $\det(A') = \det(\lambda A)$?

7. Legyen $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ az $1, 2, \dots, n$ számok egy tetszőleges permutációja. Készítsük el az $n \times n$-es A mátrixot a következőképpen: minden $i = 1, 2, \dots, n$-re a mátrix i-edik sorában a $\pi(i)$-edik helyen és attól jobbra mindenhol álljon 1-es, a $\pi(i)$-edik helytől balra pedig mindenhol álljon 0. Határozzuk meg A determinánsát!

8. Egy $n \times n$-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$. Határozzuk meg A determinánsát!

9. Egy 5×5-ös mátrix determinánsának definíció szerinti kiszámításakor 30 nullától különböző szorzatot kapunk. Igaz-e, hogy ekkor a mátrix legfeljebb 15 nullát tartalmaz?

10. Határozzuk meg $(\det A + \det B)$ értékét, ahol A és B az alábbi mátrixok.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$