Lineáris leképezések

Bevezetés a számításelméletbe 1.
9. gyakorlat

2013. november 5.

Tétel

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és B egy $(n \times n)$-es mátrix, melynek oszlopai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor az f transzformáció B bázis szerinti $[f]_B$ mátrixára az alábbiak teljesülnek.

(i) Minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $[f(\underline{x})]_B = [f]_B[\underline{x}]_B$.

(ii) $[f]_B = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$.

(iii) Minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az $[f]_B$ mátrix i-edik oszlopa egyenlő az $[f(\underline{b}_i)]_B$ koordinátavektorral.

1. Adjuk meg $\operatorname{Im} f$ és $\operatorname{Ker} f$ egy-egy bázisát, ha az f lineáris leképezés $[f]$ mátrixa a következő.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Határozzuk meg a síkon az x tengelyre való tükrözés, mint lineáris transzformáció mátrixát az $\{(1, 2), (1, 0)\}$ bázisban.

3. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ egy lineáris transzformáció, melynek mátrixa a $\underline{b}_1 = (1, 1)$ és $\underline{b}_2 = (1, -1)$ vektorokból álló bázisban felírva az alábbi.

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy $(3, 1) \in \operatorname{Ker} f$.

4. Legyen $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ban. Tegyük fel, hogy az f mátrixa a B bázis szerint az alábbi $[f]_B$ mátrix. Milyen p paraméterek esetén teljesül, hogy $3\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + p \cdot \underline{b}_3 \in \operatorname{Ker} f$?

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Legyen $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint az alábbi mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_2$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_3) = (10; 20; 30)$.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Egy $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációt tükrözésnek hívunk, ha minden $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $f\big(f(v)\big) = v$. Bizonyítsuk be, hogy tükrözés mátrixának determinánsa nem lehet 0.

7. Legyen $f: \mathbb{R}^{2006} \to \mathbb{R}^{2006}$ lineáris transzformáció, és legyen $[f]_B$ az f leképezésnek egy B bázisban felírt mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy ha $\dim \operatorname{Im} f = 2000$, akkor $\det[f]_B = 0$ teljesül!

8. Legyenek f és g az $\mathbb{R}^n$ vektortér lineáris transzformációi, és tegyük fel, hogy $\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$. Az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges $\underline{v}$ vektorára definiálja $h(v) := f(g(v))$ a h lineáris transzformációt. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} g$.