Konzultáció

Bevezetés a számításelméletbe 1

1. Az e egyenes egyenletrendszere $\frac{2x-3}{4} = \frac{3y+4}{6} = \frac{z}{2}$, az f egyenesé $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{3z-5}{6}$. Párhuzamos-e e és f? Ha igen, akkor határozzuk meg az őket tartalmazó sík egyenletét.

2. Párhuzamos-e az $\frac{5x+3}{10} = \frac{4-y}{5} = \frac{5-2z}{2}$ egyenletrendszerű egyenes a $6x+y+7z=91$, illetve az $5x+2y=79$ egyenletű síkok metszésvonalával?

3. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^5$-ben az alábbi részhalmazok? Ha a válasz igen, adjuk meg az altér dimenzióját is.

   (a) $V \subseteq \mathbb{R}^5$ azokból az oszlopvektorokból áll, amelyeknek a koordinátái (fölülről lefelé haladva) számtani sorozatot alkotnak.

   (b) $W \subseteq \mathbb{R}^5$ azokból az oszlopvektorokból áll, amelyeknek a koordinátái (fölülről lefelé haladva) mértani sorozatot alkotnak.

4. Legyenek V és W $\mathbb{R}^n$ tetszőleges alterei. Mutassuk meg, hogy ekkor $V \cap W$ is altere R^n-nek.

5. Legyenek V és W $\mathbb{R}^n$ tetszőleges alterei. Bizonyítsuk be, hogy $V \cup W$ akkor és csak akkor altere R^n-nek, ha $V \subseteq W$ vagy $W \subseteq V$ fennáll.

6. Megadható-e $\mathbb{R}^5$-ben öt darab vektor úgy, hogy közülük bármely három által alkotott rendszer lineárisan független legyen, de semelyik négy által alkotott rendszer ne legyen az?

7. Megadható-e 6 darab $\mathbb{R}^4$-beli vektor úgy, hogy közülük bármely 5 generátorrendszert alkosson $\mathbb{R}^4$-ben, de semelyik 4 sem alkosson generátorrendszert $\mathbb{R}^4$-ben?

8. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a páros sorszámú és a páratlan sorszámú koordináták összege is 0. Határozzuk meg $\dim W$ értékét és adjunk meg W-ben egy olyan bázist, ami tartalmazza a jobbra látható két vektort. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

9. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 10x_5 &= 5 \\ 5x_1 - 2x_2 + 19x_3 + 14x_4 + x_5 &= 17 \\ 2x_1 + 6x_3 + p \cdot x_4 + (3p-27) \cdot x_5 &= p+2 \end{aligned}$$

10. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér két alterének, V_1-nek és V_2-nek a nullvektor az egyetlen közös eleme. Bizonyítsuk be, hogy $\dim V_1 + \dim V_2 \leq n$.

11. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ és a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok generálják ugyanazt az $\mathbb{R}^n$-beli V alteret, vagyis $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \rangle = \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4 \rangle = V$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az alábbi négy vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő: $\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{a}_3 + \underline{b}_1, \underline{a}_3 + \underline{b}_2, \underline{b}_3 + \underline{b}_4$.

12. (a) Egy négy egyenletből álló, négyismeretlenes egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Igaz-e, hogy a jobb oldalak tetszőleges megváltoztatásával kapott egyenletrendszernek is pontosan egy megoldása van?

    (b) Egy öt egyenletből álló, négyismeretlenes egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Igaz-e, hogy a jobb oldalak tetszőleges megváltoztatásával kapott egyenletrendszernek is pontosan egy megoldása van?

13. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a determináns definíciója szerint. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & -2 & -6 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

14. A 4×5-ös A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem minden $1 \leq i \leq 4$ és $1 \leq j \leq 5$ esetén legyen $(-1)^d$, ahol d az $i^{20} + j^{30}$ szám (10-es számrendszerbeli alakjának) első számjegye. Határozzuk meg az $A \cdot A^\top$ mátrix főátlójában álló elemek összegét.

15. Az alábbi A mátrixra $\det A = 45653$. Mennyi $\det B$ értéke?

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 8 & 3 & 0 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 7 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

16. Tegyük fel, hogy a 10×10 méretű A valós mátrix minden sorösszege és minden oszlopösszege egyaránt 10. Készítsük el a 11×11 méretű A' mátrixot úgy, hogy A-hoz jobbról hozzáírunk egy csupa 1-esekből álló oszlopot, majd a kapott mátrix alá írunk egy csupa 10-esből álló sort. Mutassuk meg, hogy $\det(A') = 0$.

17. Egy $n \times n$-es mátrix minden sorában az elemek összege 2008. Bizonyítsuk be, hogy ha a mátrix egyik oszlopának minden elemét kicseréljük 1-esre, akkor az így kapott új mátrix determinánsa 2008-adrésze lesz az eredeti mátrix determinánsának.

18. Legyen A és B $n \times n$-es mátrix és tegyük fel, hogy $A \cdot B$ a nullmátrix (amelynek tehát minden eleme 0).

    (a) Igaz-e, hogy ha A minden eleme pozitív és B minden eleme nemnegatív, akkor $B \cdot A$ is mindenképpen a nullmátrix?

    (b) Igaz-e ugyanez az állítás akkor, ha csak annyit teszünk fel, hogy A és B minden eleme is nemnegatív?

19. A 100×100-as A mátrix bal felső sarkában álló 50×50-es részmátrixának minden eleme 6, a jobb felső sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme -4, a bal alsó sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme 9, végül a jobb alsó sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme -6. Határozzuk meg az A^{2012} mátrixot (vagyis annak a 2012 tagú szorzatnak az eredményét, amelynek minden tagja A).