Térbeli koordinátageometria

Bevezetés a számításelméletbe 1

1. gyakorlat

Egyenes paraméteres egyenletrendszere

Adott $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ és $P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. A P ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{aligned}\right\}.$$

Egyenes egyenletrendszere

Adott $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ és $P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Ha $a, b, c \neq 0$, akkor a P ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Ha például $c = 0$, akkor az egyenes egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{x-x_0}{a} &= \tfrac{y-y_0}{b} \\ z &= z_0 \end{aligned}\right\}.$$

Sík egyenlete

Adott $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ és $P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. A P ponton átmenő, $\underline{n}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0.$$

1. Döntsük el, hogy rajta van-e a $P(-3, 2, 5)$ pont az $\frac{x-6}{2} = \frac{y-20}{4} = z - \frac{19}{2}$ egyenesen.
2. Határozzuk meg az $S:\ 2x - 3y + 4z = 3$ sík és a következő egyenesek metszetét.

   (a) $\left.\begin{aligned} x &= 11 + 2t \\ y &= -t \\ z &= 29 + 5t \end{aligned}\right\}$

(b) $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{8}=\dfrac{z+1}{3}$

3. Írjuk fel a $P(-2,5,6)$ és a $Q(7,-1,3)$ pontok összekötő egyenesének egyenletrendszerét.

4. Mi a
$$\frac{2x-3}{5}=4y+7=\frac{1-3z}{2}$$
egyenes irányvektora?

5. Párhuzamos-e az
$$\frac{5x+3}{10}=\frac{4-y}{5}=\frac{5-2z}{2}$$
egyenletrendszerű egyenes a $6x+y+7z=91$, illetve az $5x+2y=79$ egyenletű síkok metszésvonalával.

6. Határozzuk meg az
$$x-4=\frac{y+5}{4}=\frac{2-z}{3}$$
egyenletrendszerű e egyenes minden olyan P pontját, amelyre a P-t a $Q(7;12;4)$ ponttal összekötő f egyenes merőleges e-re.

7. Legyen adott $A(1,0,0)$, $B(1,-2,4)$, és
$$e:\ \frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{3}=z-3.$$
Keressük meg az e egyenesen azon C pontot, melyre $\left|\overline{AC}\right|=\left|\overline{BC}\right|$ teljesül.

8. Tükrözzük a $P\begin{pmatrix}8\\-3\\3\end{pmatrix}$ pontot a $7x-y+2z=11$ egyenletű síkra és határozzuk meg a tükörkép koordinátáit!

9. Legyen
$$\underline{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\ \text{és}\ \underline{e}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$
(a) Kifejezhető-e az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból az $\underline{e}$ vektor?

(b) $\mathbb{R}^3$ mely vektorai fejezhetőek ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorokból?

(c) $\mathbb{R}^3$ mely vektorai fejezhetőek ki az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból?

10. $\mathbb{R}^4$ mely vektorai fejezhetők ki az $(1,1,0,0)$, $(0,1,1,0)$, $(0,0,1,1)$ vektorokból?