Sajátérték, sajátvektor

Bevezetés a számításelméletbe 1
10. gyakorlat

Sajátérték, sajátvektor

Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix.

(i) A $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárt az A sajátértékének nevezzük, ha létezik olyan $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor, amelyre $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ teljesül.

(ii) A $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektort az A sajátvektorának nevezzük, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, amelyre $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ teljesül.

Tétel

Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix. A $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$.

Állítás

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ az A $(n \times n)$-es mátrix egy sajátértéke. Ekkor az $(A - \lambda E)\underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszer $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldásai az A mátrix λ-hoz tartozó sajátvektorai.

Karakterisztikus polinom

Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix. A $\det(A - \lambda \cdot E)$ determináns értékét az A karakterisztikus polinomjának nevezzük, ahol λ a változó. A jele $k_A(\lambda)$.

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát!

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

2. (a) Sajátvektora-e az alábbi $\underline{v}$ vektor az alábbi A mátrixnak?

   (b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét és az összes, ehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektort.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

3. A p valós paraméter minden értékére adjuk meg az alábbi mátrix minden sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez tartozó minden sajátvektort.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ p & 4 & p \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Az $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya

$$f:\ (x,y,z) \mapsto (0, 3x+4y+z, 6x+2y+5z).$$

   (a) Adjuk meg az $[f]$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

   (b) Van-e $\mathbb{R}^3$-ben olyan B bázis, amire az $[f]_B$ mátrix diagonális (vagyis a főátlóján kívül minden elem nulla)? Ha igen, adjunk meg egy ilyen B-t és írjuk fel $[f]_B$-t.

5. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ az f lineáris transzformáció különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai.

   (a) Lehetséges-e, hogy $\underline{u}+\underline{v}$ is sajátvektora f-nek?

   (b) Lehetséges-e, hogy $\underline{u}+\underline{v}$ is sajátvektora f^2-nek?

6. Legyen $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és B egy bázis $\mathbb{R}^n$-ben.

   (a) Mutassuk meg, hogy az $[f]$ és az $[f]_B$ mátrixok sajátértékei azonosak.

   (b) Igaz-e, hogy az $[f]$ és az $[f]_B$ karakterisztikus polinomjai is megegyeznek?

7. A sík egy lineáris transzformációja a $(2,1)$ vektorhoz az $(1,1)$ vektort rendeli, az $(1,1)$ vektorhoz pedig a $(2,1)$ vektort. Határozzuk meg a transzformáció egy sajátvektorát és a hozzá tartozó sajátértéket.

8. Az alábbi A mátrix $\square$-tel jelölt elemeit nem ismerjük, de azt tudjuk, hogy A-nak a 3 sajátértéke. Adjuk meg A-nak egy másik sajátértékét is.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \square \\ \square & 6 \end{pmatrix}$$

9. Adjuk meg a p paraméter értékét és az alábbi A mátrix egy sajátvektorát, ha tudjuk, hogy az 5 sajátértéke A-nak.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & p \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$