Számosságok

Bevezetés a számításelméletbe 1
13. gyakorlat

Injektív, szürjektív, bijektív függvény

Legyenek A és B tetszőleges halmazok és $f:\ A \to B$ egy függvény.

(i) Az f függvényt injektívnek nevezzük, ha bármely $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(ii) Az f függvényt szürjektívnek nevezzük, ha minden $y \in B$ esetén létezik olyan $x \in A$, amelyre $f(x) = y$.

(iii) Az f függvényt bijektívnek nevezzük, ha egyszerre injektív és szürjektív.

Definíció

Legyenek A és B tetszőleges halmazok.

(i) Azt mondjuk, hogy az A és B halmazok számossága egyenlő, ha létezik egy $f:\ A \to B$ bijekció. Jelölése: $|A| = |B|$.

(ii) Azt mondjuk, hogy az A halmaz számossága kisebb vagy egyenlő a B számosságánál, ha létezik egy $f:\ A \to B$ injektív függvény. Jelölése: $|A| \leq |B|$.

(iii) Azt mondjuk, hogy az A halmaz számossága kisebb a B számosságánál, ha $|A| \leq |B|$, de $|A| \neq |B|$. Jelölése: $|A| < |B|$.

Cantor–Bernstein-tétel

Az A és B halmazokra $|A| = |B|$ akkor és csak akkor igaz, ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ egyaránt fennállnak.

Cantor-tétel

Minden A halmazra $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Megszámlálhatóan végtelen

Az A halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezzük, ha a számossága egyenlő a természetes számok halmazáéval (vagyis $|A| = |\mathbb{N}|$).

Kontinuum

Az A halmazt kontinuum számosságúnak nevezzük, ha a számossága egyenlő a valós számok halmazáéval (vagyis $|A| = |\mathbb{R}|$).

1. Döntsük el az alábbi $f : X \to Y$ függvényekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.

(a) $X = Y = \{\text{A, B, E, G, L, R}\}$, f minden betűhöz az ALGEBRA szóban utána következő betűt rendeli.

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad x \mapsto 2x$.

(c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \qquad x \mapsto |x|$.

2. Döntsük el, hogy $|A| = |B|$ teljesül-e az alábbi halamzokra.

   (a) A a pozitív prímszámok, B a pozitív összetett számok halmaza.

   (b) $A =]0, \infty[$, $B = \mathbb{R}$.

   (c) $A = [0, \infty[$, $B = \mathbb{R}$.

   (d) $A =]0, 1[$, $B = \mathbb{R}$.

3. Mi a számossága az alábbi halmazoknak?

   (a) Azon síkvektorok halmaza, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám.

   (b) Azon térvektorok halmaza, amelyeknek mind a három koordinátája pozitív racionális szám.

   (c) Azon tetszőleges magasságú oszlopvektorok halmaza, amelyeknek minden koordinátája racionális szám.

   (d) Az irracionális számok halmaza.

   (e) Azon számhalmaz, melynek elemei felírhatók $a+b\sqrt{k}$ alakban úgy, hogy k pozitív egész, a és b pedig racionális számok.

   (f) Olyan végtelen hosszú $0-1$ sorozatok halmaza, melyekben pontosan 5 darab egyes fordul elő.

   (g) Azon (végtelen hosszú) számtani sorozatok halmaza, amelyeknek minden eleme pozitív egész szám.

4. A H halmaz álljon az összes olyan, az a és b betűkből készített, végtelen hosszú sorozatokból, amelyekben minden n pozitív egészhez található n darab szomszédos b betű. Határozzuk meg H számosságát!