Altér, generátorrendszer, lineáris függetlenség

Bevezetés a számításelméletbe 1
2. gyakorlat

Altér

A $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ részhalmazt az $\mathbb{R}^n$ egy alterének nevezzük, ha V zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve.

Lineáris kombináció

Legyen $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. A $\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{v}_k$ vektort a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

Generált altér

Legyen $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$. A

$$\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \rangle := \{\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{v}_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

halmazt a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok által generált altérnek nevezzük.

Lineáris függetlenség

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszerről azt mondjuk, hogy lineárisan független, ha

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{v}_k = \underline{0} \iff \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0;$$

ellenkező esetben lineárisan összefüggő vektorrendszerről beszélünk.

Az újonnan érkező vektor lemmája

Ha az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k$ rendszer lineárisan független, de az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k, \underline{f}_{k+1}$ rendszer lineárisan összefüggő, akkor $\underline{f}_{k+1} \in \langle \underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k \rangle$ (vagyis $\underline{f}_{k+1}$ kifejezhető az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k$ lineáris kombinációjaként).

1. Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek. Ha nem, akkor határozzuk meg az általuk generált altér egyenletét.

   (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Döntsük el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 = 0 \right\}$ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 = 1 \right\}$

3. A valós számhármasok vektorterében alteret alkotnak-e azok az $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ vektorok, melyekre $x_1 = 2x_2 - 3x_3$ teljesül?

4. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorokról tudjuk, hogy az összegük a nullvektor. Bizonyítsuk be, hogy
$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{k-1} \rangle = \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_k \rangle.$$

5. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független vektorrendszer egy tetszőleges vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{a} - \underline{c}$, $\underline{b} + \underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független.

6. Tegyük fel, hogy az $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\ldots$, $\underline{u}_m$ vektorok között pontosan egy olyan van, ami kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Mutassuk meg, hogy ekkor ez a vektor csakis a nullvektor lehet.

7. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok. Tegyük fel, hogy $\underline{w} \neq \underline{0}$ és a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_i + \lambda \cdot \underline{w}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_k$ vektorrendszer lineárisan független a $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár és az $1 \leq i \leq k$ egész bármely megválasztása esetén. Következik-e ebből, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w}$ rendszer is lineárisan független?

8. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci-típusúnak, ha a (felülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például az alábbi vektor Fibonacci-típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci-típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben?
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

9. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ $\mathbb{R}^4$-beli vektorok. Tegyük fel, hogy bármely k, ℓ és m egész számokra, amelyek nem mindegyike 0, a $k \cdot \underline{a} + \ell \cdot \underline{b} + m \cdot \underline{c}$ lineáris kombináció értéke különbözik a $\underline{0}$-tól. Következik-e ebből, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független rendszer?