

Bázis, dimenzió

Bevezetés a számításelméletbe 1

3. gyakorlat

F-G egyenlőtlenség

Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$ altér, $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_k\} \subseteq V$ lineárisan független rendszer, $\{\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m\}$ pedig V egy generátorrendszere. Ekkor $k \leq m$.

Bázis

A $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ vektorrendszert a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisának nevezzük, ha lineárisan független és egyúttal V generátorrendszere.

Tétel

Ha egy $V \leq \mathbb{R}^n$ altérnek van k -elemű bázisa, akkor minden bázisa k -elemű.

Dimenzió

A $V \leq \mathbb{R}^n$ vektortér dimenziója k , ha V -nek van k -elemű bázisa (ekkor V összes bázisa k -elemű).

Tétel

A $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k\}$ vektorrendszer pontosan akkor bázisa a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérnek, ha minden $\underline{v} \in V$ vektor egyértelműen áll elő a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Koordinátavektor

Legyen $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér egy bázisa és $\underline{v} \in V$ egy tetszőleges vektor.

Azt mondjuk, hogy a $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$ vektor a \underline{v} vektor B szerinti koordinátavektora,

ha $\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \dots + \lambda_k \underline{b}_k$. Jelölése:

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

1. Legyen \mathbb{R}^3 -ben $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e?

- (a) \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} lineárisan független.
- (b) \underline{a} , \underline{b} , \underline{d} lineárisan független.
- (c) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$.
- (d) \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} generátorrendszer.

(e) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis.

Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis, akkor határozzuk meg \underline{d} koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

2. Adjuk meg \mathbb{R}^3 alábbi alterének egy bázisát:

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \middle| 3x + 2y + z = 0 \right\}.$$

3. Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \dots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ és $\underline{v}_2 + \underline{v}_4 + \underline{v}_6 + \dots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ teljesül a V vektortér $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{100}$ vektoraira. Jelöljük a $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{100} \rangle$ generált alteret W -vel. Bizonyítsuk be, hogy $\dim W \leq 98$.

4. Bizonyítsuk be, hogy az \mathbb{R}^{99} tér két 50-dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme!

5. Tegyük fel, hogy az \mathbb{R}^n térnek a $H = \{a, b, c, d, e, f\}$ részhalmaza rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy H bármely 3-elemű X részhalmazára X és $H \setminus X$ ugyanazt az alteret generálja. Igazoljuk, hogy ha $\{a, b, c\}$ lineárisan független vektorok, akkor H -nak bármely 3 vektora lineárisan független.

6. Legyen

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 36 \\ p \end{pmatrix}.$$

A p paraméter milyen értékére igaz a $\underline{v} \in \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$ állítás? A p ezen értékére határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort, ahol $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$.

7. Az \mathbb{R}^5 -beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a páros sorszámú és a páratlan sorszámú koordináták összege is 0. Határozzuk meg $\dim W$ értékét és adjunk meg W -ben egy olyan bázist, ami tartalmazza az alábbi két vektort. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$