

# Gauss-elimináció

Bevezetés a számításelméletbe 1

4. gyakorlat

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

(a)

$$\begin{aligned}x + 3y + 2z &= 3 \\3x + 5y + 10z &= 5 \\3x + 2y + 13z &= 2 \\6x + 13y + 18z &= 13\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x + 3y + 2z &= 3 \\3x + 5y + 10z &= 5 \\3x + 2y + 13z &= 2 \\6x + 13y + 17z &= 13\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x + 3y + 2z &= 3 \\3x + 5y + 10z &= 5 \\3x + 2y + 13z &= 2 \\6x + 13y + 17z &= 11\end{aligned}$$

2. Döntsük el, hogy a  $p$  valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 4x_4 &= -2 \\2x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 &= -3 \\x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 2 \\3x_1 - 3x_2 + px_3 + (p^2 + p + 12)x_4 &= -6\end{aligned}$$

3. Döntsük el, hogy a  $p$  és  $q$  valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 - 14x_3 &= -17 \\2x_1 - 6x_2 - 28x_3 + p \cdot x_4 &= q - 34 \\3x_1 - 7x_2 - 36x_3 + 4p \cdot x_4 &= 4q - 37\end{aligned}$$

4. Oldjuk meg az alábbi  $n$  ismeretlenes és  $n$  egyenletből álló egyenletrendszereket.

(a)

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n &= n \\x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n &= n - 1 \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n &= n - 2 \\&\vdots \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n &= 1\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 1 \\x_2 + x_3 &= 1 \\&\vdots \\x_{n-1} + x_n &= 1 \\x_n + x_1 &= 1\end{aligned}$$

5. Találtunk egy lapot, amin valaki a (lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló) Gauss-eliminációt gyakorolta. A papír sajnos erősen megrongálódott, ezért csak a kiinduló feladat részletei és a néhány lépés után kapott lépcsős alak olvasható.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \square & 6 & \square & \square & \square \\ 2 & 4 & -4 & 7 & \square \\ 5 & 10 & \square & \square & -4 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

A kiinduló feladatban a  $\square$ -tel jelölt számok olvashatatlanok. (Ezek persze egymástól különböző értékek is lehetnek.) Rekonstruáljuk a lap elveszett részeit: adjuk meg a  $\square$ -ekben álló értékeket, majd futtassuk le a Gauss-eliminációt és adjuk meg az egyenletrendszer megoldásait.

6. Egy négyváltozós lineáris egyenletrendszerből bárhogyan is hagyunk el egy egyenletet, a kapott egyenletrendszer egyértelműen megoldható lesz. Legkevesebb hány egyenletet kell tartalmazzon az eredeti egyenletrendszer?
7. A  $p$  paraméter milyen értékére esnek egy síkba az  $A(2; 3; 3)$ ,  $B(3; 4; 1)$ ,  $C(4; 6; 2)$  és  $D(p; 2; 5)$  pontok?
8. A  $p$  valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 19 \\ 7 \\ p \end{pmatrix}$$

vektorok.