

# Determináns

## Bevezetés a számításelméletbe 1

### 5. gyakorlat

#### Permutáció

A  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$   $n$ -tagú számsorozatot permutációnak nevezünk, ha az  $1, \dots, n$  számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az  $n$ -edfokú permutációk halmazát  $S_n$  jelöli.

#### Inverzió

A  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  permutációban a  $\pi_i$  és a  $\pi_j$  tagok inverzióban állnak, ha  $i < j$ , de  $\pi_i > \pi_j$ . A  $\pi$  permutáció inverziószáma az összes inverzióban álló számpárak száma. Ennek jele  $I(\pi)$ .

#### Determináns

Az  $n \times n$ -es  $A$  mátrix determinánsának a  $\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(i)}$  értéket nevezzük.

#### Tétel

Legyen  $A$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

- $\det(A) = \det(A^T)$ .
- Ha  $A$  felső/alsó háromszögmátrix, akkor  $\det(A)$  a főátlóbeli elemek szorzata.
- Ha  $A$  egy sora/oszlopa csupa nulla, akkor  $\det(A) = 0$ .
- Ha  $A$  egy sorát/oszlopát  $\lambda$ -val végigszorozzuk, akkor a determináns is  $\lambda$ -val szorzódik.
- Ha  $A$  két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.
- Ha  $A$  két sora/oszlopa megegyezik, akkor  $\det(A) = 0$ .
- Ha  $A$  egy sorának/oszlopának  $\lambda$ -szorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz/oszlophoz, akkor a determináns nem változik.

1. Határozzuk meg az alábbi permutációk inverziószámát!

(a)  $(1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$

(b)  $(n, n-1, \dots, 2, 1)$

(c)  $(21, 22, \dots, 30, 11, 12, \dots, 20, 1, 2, \dots, 10)$

2. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét a determináns definíciója szerint!

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & -2 & -6 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

3. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét!

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 11 & -7 \\ -3 & 9 & -5 & -9 & 5 \\ 4 & -12 & 8 & 13 & -2 \\ 5 & -11 & 10 & -1 & -12 \end{vmatrix}$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

4. Legyen  $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$  az  $1, 2, \dots, n$  számok egy tetszőleges permutációja. Készítsük el az  $n \times n$ -es  $A$  mátrixot a következőképpen: minden  $i = 1, 2, \dots, n$ -re a mátrix  $i$ -edik sorában a  $\pi(i)$ -edik helyen és attól jobbra mindenhol álljon 1-es, a  $\pi(i)$ -edik helytől balra pedig mindenhol álljon 0. Határozzuk meg  $A$  determinánsát!
5. Egy  $n \times n$ -es  $A$  mátrixban az  $i$ -edik sor és a  $j$ -edik oszlop kereszteződésében álló elem  $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$ . Határozzuk meg  $A$  determinánsát!
6. Az alábbi  $A$  mátrixra  $\det A = 45653$ . Mennyi  $\det B$  értéke?

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 8 & 3 & 0 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 7 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

7. A jobbra látható determináns definíció szerinti kiszámításakor

(a) hány nemnulla szorzat keletkezik;

(b) milyen előjelet kap az a szorzat, amelynek az egyik tényezője 3?

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

8. Legyen  $A$  egy nem 0 determinánsú,  $9 \times 9$ -es mátrix,  $A'$  pedig az a mátrix, amit  $A$ -ból az első sor  $\lambda$ -val való szorzásával kapunk. Mennyi lehet  $\lambda$  értéke, ha tudjuk, hogy  $\det(A') = \det(\lambda A)$ ?