Lineáris leképezések

Bevezetés a számításelméletbe 1
8. gyakorlat

Magtér, képtér

Az $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés magtere

$$\operatorname{Ker} f := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = \underline{0}\},$$

a képtere pedig

$$\operatorname{Im} f := \left\{\underline{y} \in \mathbb{R}^k \mid \exists \underline{x} \in \mathbb{R}^n :\ f(\underline{x}) = \underline{y}\right\}.$$

Dimenziótétel

Tetszőleges $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés esetén

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n.$$

Állítás

Tetszőleges f lineáris leképezés esetén

$\operatorname{Im} f$ megegyezik az $[f]$ mátrix oszlopai által generált altérrel;
az $[f]$ mátrix redukált lépcsős alakjában a vezéregyest tartalmazó oszlopok száma $\dim \operatorname{Im} f$,
azaz $\mathrm{r}([f]) = \dim \operatorname{Im} f$,
sőt, az $[f]$ mátrix előbb említett oszlopai $\operatorname{Im} f$ egy bázisát alkotják.

1. Lineáris leképezések-e az alábbi $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvények? Ha igen, akkor írjuk fel a leképezés $[f]$ mátrixát és határozzuk meg a magterét és a képterét, valamint ezek dimenzióját.

   (a) $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto (y, 3x)$

   (b) $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto (x^2, y^2)$

   (c) $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x - y + z)$

   (d) Az $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ minden $\underline{v}$ síkvektorhoz azt az x tengelyre eső vektort rendeli, melynek az első koordinátája a $\underline{v}$ két koordinátája közül a nagyobb (nemkisebb).

   (e) Az $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ minden síkvektorhoz az x tengelyre vett tükörképének origó körüli $+60°$-os elforgatottját rendeli.

2. Adjuk meg $\operatorname{Im} f$ és $\operatorname{Ker} f$ egy-egy bázisát, ha az f lineáris leképezés $[f]$ mátrixa a következő.

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 12 & 1 & 14 \\ 3 & 9 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

3. A sík egy lineáris transzformációjának mátrixa a szokásos bázisban

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix},$$

ahol x tetszőleges valós szám. Határozzuk meg x függvényében a transzformáció képterét és magterét.

4. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés az $(1;2)$ vektorhoz a $(0;3;-3)$ vektort, a $(2;1)$-hez a $(3;3;0)$-t rendeli. A p paraméter mely értékei esetén igaz az $(1;2;p) \in \operatorname{Im} f$ állítás?

5. Legyen f a szokásos háromdimenziós tér olyan lineáris transzformációja, melynek a képtere kétdimenziós. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektor, ami sem a magtérnek, sem a képtérnek nem eleme.

6. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel:

   a. Tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő;

   b. Tetszőleges 8 lineárisan független $\mathbb{R}^n$-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem $\underline{0}$.

   Bizonyítsuk be, hogy ekkor $n \leq 13$.

7. A 6×10-es A mátrixra $r(A) = 3$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_7 \in \mathbb{R}^{10}$ vektorok, amelyekre $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_7$ lineárisan független rendszert alkot és $A \cdot \underline{v}_1 = \underline{0}, A \cdot \underline{v}_2 = \underline{0}, \ldots, A \cdot \underline{v}_7 = \underline{0}$ teljesül.

8. Legyen $f : \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}^{10}$ lineáris leképezés, $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{20}\}$ bázis $\mathbb{R}^{20}$-ban és $\underline{v} \in \mathbb{R}^{10}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ rögzített vektor. Adjuk meg $\dim \operatorname{Ker} f$ értékét, ha tudjuk, hogy f a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{20}$ vektorok mindegyikéhez $\underline{v}$-t rendeli.

9. Legyenek f és g az $\mathbb{R}^n$ vektortér lineáris transzformációi, és tegyük fel, hogy $\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$. Az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges $\underline{v}$ vektorára definiálja $h(v) := f(g(v))$ a h lineáris transzformációt. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} g$.