Konzultáció

Bevezetés a számításelméletbe 1

1. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Határozzuk meg az $A^{-1} \cdot B^{-1}$ szorzatot!

2. A p paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak és ha igen, akkor számítsuk is ki azt.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & p \end{pmatrix}$$

3. Megválasztható-e a p paraméter értéke úgy, hogy az alábbi mátrix rangja 3 legyen? Ha igen, hogyan?
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 4 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

4. A 6×10-es A mátrixra $r(A) = 3$. Igaz-e mindig, hogy A-nak elhagyható egy sora és egy oszlopa úgy, hogy a kapott 5×9-es B mátrixra $r(B) = 3$ teljesüljön?

5. Létezik-e olyan $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, melyre $f(2,3) = (1,0,0)$, $f(5,6) = (0,1,0)$ és $f(11,12) = (0,0,1)$?

6. Legyen $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy lineáris transzformáció és legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ egy bázis. Tegyük fel, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_1$, $f(\underline{b}_2) = 2\underline{b}_2$ és $f(\underline{b}_3) = 3\underline{b}_3$. Határozzuk meg az f^2 lineáris transzformáció B bázishoz tartozó mátrixát! (Az f^2 lineáris transzformációt az $f^2(\underline{v}) = f\big(f(\underline{v})\big)$ formula definiálja.)

7. A $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ függvény rendelje minden $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz a $(2x_1, 2x_2, 2x_3, 0) \in \mathbb{R}^4$ vektort. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ egy bázis $\mathbb{R}^3$-ban és tegyük fel, hogy az $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezésre $f(\underline{b}_1) = g(\underline{b}_1)$, $f(\underline{b}_2) = g(\underline{b}_2)$ és $f(\underline{b}_3) = g(\underline{b}_3)$ teljesül. Írjuk fel f-nek az $[f]$ mátrixát.

8. Sajátértéke-e a 3 az alábbi A mátrixnak? Ha igen, adjuk meg az A egy 3-hoz tartozó sajátvektorát.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

9. Az 5×5-ös A mátrix negyedik oszlopának (felülről) a negyedik eleme 7, a negyedik oszlop összes többi eleme 0. (A mátrix többi eleme nem ismert.)

   (a) Mutassuk meg, hogy $\lambda = 7$ sajátértéke A-nak!

   (b) Adjuk meg A egy sajátvektorát!

10. A p valós paraméter minden értékére legyen $f_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amely egy tetszőleges $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz az $(x + y + z;\ 4x + 2y;\ y + p \cdot z)$ vektort rendeli.

   (a) A p milyen értékeire teljesül, hogy $(1; 1; 1)$ sajátvektora $[f_p]$-nek?

   (b) A p milyen értékeire teljesül, hogy $\lambda = 3$ sajátértéke $[f_p]$-nek?

   (A feladat megoldásához nem szükséges megmutatni azt, hogy f_p valóban lineáris transzformáció.)

11. Határozzuk meg a $10x \equiv 24 \pmod{m}$ lineáris kongruencia megoldásait modulo m, ahol

   (a) $m = 15$, illetve

   (b) $m = 16$.