Számelmélet

Bevezetés a számításelméletbe 1

1. gyakorlat

Definíció

Legyenek $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ tetszőlegesek. Azt mondjuk, hogy a kongruens b-vel modulo m, ha $m \mid b - a$ (azaz a és b azonos maradékot ad m-mel osztva). Ennek a jele $a \equiv b \pmod{m}$.

Tétel

Legyenek $a, b, c, d, m, k \in \mathbb{Z}$, $m > 0$, $k \geq 1$ tetszőlegesek. Ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $c \equiv d \pmod{m}$, akkor az alábbiak teljesülnek.

1. $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
2. $a - c \equiv b - d \pmod{m}$
3. $ac \equiv bd \pmod{m}$
4. $a^k \equiv b^k \pmod{m}$

Tétel

Legyenek $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ tetszőlegesek, és legyen $d = (c, m)$. Ekkor

$$ac \equiv bc \pmod{m} \qquad \iff \qquad a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{d}\right).$$

Néhány azonosság

Tetszőleges a, b valós számok és $n > 1$ egész szám esetén

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Tetszőleges a, b valós számok és $n > 1$ *páratlan* szám esetén

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

1. Igazak-e az alábbi állítások?
   (a) $13 \equiv -13 \pmod{5}$
   (b) $-4 \equiv 22 \pmod{13}$
   (c) $-677 \equiv 977 \pmod{100}$
   (d) $-82 \equiv 72 \pmod{7}$

2. Milyen maradékot ad
   (a) 70^{70} 23-mal osztva;
   (b) 55^{100} 48-cal osztva;

(c) 1025^{1005} 1023-mal osztva?

3. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e minden a, b, k egész számra és pozitív m modulusra.

   (a) $a \equiv b \pmod 3 \quad \Rightarrow \quad a \equiv b \pmod{15}$
   (b) $a \equiv b \pmod{15} \quad \Rightarrow \quad a \equiv b \pmod 3$
   (c) $a \equiv b \pmod m \quad \Leftrightarrow \quad ka \equiv kb \pmod m$
   (d) $a^2 \equiv 1 \pmod{13} \quad \Rightarrow \quad a \equiv \pm 1 \pmod{13}$
   (e) $a^2 \equiv 1 \pmod{39} \quad \Rightarrow \quad a \equiv \pm 1 \pmod{39}$
   (f) $a^2 \equiv 1 \pmod{39} \quad \Rightarrow \quad a \equiv \pm 1 \pmod{13}$

4. Melyik az a legnagyobb m modulus, amelyre a $42x \equiv 2015 \pmod m$ kongruenciának megoldása az $x = 3$?

5. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre az alábbi kongruenciák (külön-külön) teljesülnek.

   (a) $5^n \equiv 3^n + 8 \pmod{26}$
   (b) $3n + 1 \equiv 6 \pmod{2n}$
   (c) $2n + 1 \equiv 6 \pmod{3n}$

6. Határozzuk meg az összes olyan x egész számot, amelyre az alábbi kongruenciák (külön-külön) teljesülnek.

   (a) $3x \equiv 2 \pmod 5$
   (b) $62x \equiv 24 \pmod{36}$
   (c) $13x \equiv 1 \pmod{28}$
   (d) $77x \equiv 251 \pmod{35}$

7. Egy egész szám 109-cel vett osztási maradéka 5-tel kisebb, mint a szám 18-szorosának a 109-cel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 109-cel osztva?

8. (a) Hány pozitív osztója van a 27000-nek?
   (b) Hány olyan pozitív osztója van a 27000-nek, ami osztható 3-mal?
   (c) Hány olyan pozitív osztója van a 27000-nek, ami négyzetszám?
   (d) Határozzuk meg a 27000 és az 16200 közös pozitív osztóinak a számát.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha az $n > 1$ számnak 2005 pozitív osztója van, akkor n nem lehet egy egész szám ötödik hatványa.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $n \geq 1$ egészre $2^n - 1$ prím, akkor n is prím.

11. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c és d egész számokra

$$(a + b, c + d) \mid a^{99}c^{100} + b^{99}d^{100}.$$