ifejtési tétel, vektoriális szorzat, műveletek mátrixokkal

Bevezetés a számításelméletbe 1
10. gyakorlat

Előjeles aldetermináns

Az $n \times n$-es A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó A_{ij} előjeles aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az A mátrixból elhagyjuk az i-edik sorát és a j-edik oszlopát, majd a kapott $(n-1)\times(n-1)$-es mátrix determinánsát megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

Kifejtési tétel

Ha az $n\times n$-es A mátrix valamelyik sorának, vagy oszlopának minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével és a kapott n darab kéttényezős szorzatot összeadjuk, akkor A determinánsának értékét kapjuk.

Vektoriális szorzat

Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok vektoriális szorzata

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

ahol $\underline{i} = (1, 0, 0)$, $\underline{j} = (0, 1, 0)$, $\underline{k} = (0, 0, 1)$.

Áll.

Ha A $m \times n$-es, B $n \times k$-as mátrix, akkor $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Determinánsok szorzástétele

Ha A, B $n \times n$-es valós mátrixok, akkor $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Tétel

Legyenek A, B, C $n\times n$-es mátrixok és legyen $i \in \{1, \ldots, n\}$ tetszőleges. Ha az A, B, C mátrixok az i-edik sorukat leszámítva megegyeznek, valamint a C mátrix sora éppen az A és a B mátrix i-edik sorának a tagonkénti összege, akkor $\det C = \det A + \det B$.

1. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét a kifejtési tétel felhasználásával!

(a)
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi determinánst a p valós paraméter minden értékére.

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 5 & p \\ 6 & p & 4 & 0 \\ 7 & 2 & p & 0 \\ 6 & p & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

3. Határozzuk meg $(\det A + \det B)$ értékét, ahol A és B az alábbi mátrixok.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

4. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az AB, BA, $A \cdot A^\top$, $AB + 2C$ mátrixokat!

5. (a) Számítsuk ki az A^{2015} mátrixot az alábbi A mátrixra.
   (b) Számítsuk ki $\det\left(B^{2015}\right)$ értékét az alábbi B mátrixra.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Döntsük el, hogy az alábbi egyenlőségek igazak-e bármely $n \times n$-es A és B mátrixokra.
   (a) $(AB)^2 = A^2B^2$
   (b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
   (c) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$
   (d) $(A-E)^2 = A^2 - 2A + E$
   (e) $A^3 + E = (A+E)(A^2 - A + E)$
   (f) $A^3 - E = (A-E)(A^2 + A + E)$

7. Az A mátrix minden eleme 0, 1 vagy -1, és a 0-tól különböző elemeinek száma 2012. Határozzuk meg az $A \cdot A^\top$ mátrix főátlójában álló elemeknek az összegét.

8. A 100×100-as A mátrix első 50 oszlopának minden eleme 3, az utolsó 50 oszlop minden eleme 2. A 100×100-as B mátrix minden oszlopára teljesül, hogy abban az első 50 elem összege 2, az utolsó 50 elem összege 3. Határozzuk meg az AB szorzatot.

9. Léteznek-e olyan 2×2-es A és B mátrixok, melyekre $A \cdot A = B \cdot B$, de $A \neq B$ és $A \neq (-1) \cdot B$?

V/1. Az e egyenes egyenletrendszere $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$, az f egyenes egyenletrendszere pedig $\frac{x}{-2} = \frac{3-y}{6} = \frac{2-z}{10}$. Döntsük el, hogy e és f párhuzamosak-e. Ha igen, akkor határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely mindkettőt tartalmazza.

VII/5. A p paraméter milyen értékére esnek egy síkba az $A(2;3;3)$, $B(3;4;1)$, $C(4;6;2)$ és $D(p;2;5)$ pontok?