Mátrixok inverze, rangja

Bevezetés a számításelméletbe 1
11. gyakorlat

Inverz mátrix

Egy A $n \times n$-es mátrix inverzén azt az $n \times n$-es A^{-1} mátrixot értjük, melyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ teljesül.

Tétel

Az $n \times n$-es A mátrixnak akkor és csak akkor létezik inverze, ha $\det A \neq 0$.

Definíció

Legyen A tetszőleges mátrix. Azt mondjuk, hogy

(i) A oszloprangja r, ha A-nak van r darab lineárisan független oszlopa, de $r+1$ darab már nincs;

(ii) A sorrangja r, ha A-nak van r darab lineárisan független sora, de $r+1$ darab már nincs;

(iii) A determinánsrangja r, ha A-nak van $r \times r$-es nemnulla determinánsú részmátrixa, de $(r+1) \times (r+1)$-es már nincs.

Tétel, definíció

Tetszőleges A mátrix oszlop-, sor- és determinánsrangja egyenlő. Ezt a közös értéket nevezzük az A mátrix rangjának.

1. Számoljuk ki a következő mátrixok inverzét, amennyiben azok léteznek!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$$

2. Az A és B $n \times n$-es mátrixokról tudjuk, hogy $\det(A) \neq 0$, valamint hogy $AB = 0$. Határozzuk meg a B mátrixot!

3. Határozzuk meg az alábbi A mátrix inverzének bal felső sarkában álló elemét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Legyen A $m \times n$-es (vagyis m sorból és n oszlopból álló), B pedig $n \times m$-es (vagyis n sorból és m oszlopból álló) mátrix. Tegyük fel, hogy $n < m$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az AB mátrix nem invertálható.

5. Számoljuk ki a következő mátrixok rangját!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Számoljuk ki a következő mátrixok rangját a c, az x, illetve a p és q valós paraméterek függvényében!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2c+7 & 3c-2 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & p \\ 3 & 4 & q & 2 \end{pmatrix}$$

7. A 6×6-os A mátrixra $r(A) = 4$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan B és C mátrixok, amelyekre $r(B) = r(C) = 2$ és $A = B + C$.

8. Nevezzünk egy számsorozatot félig számtaninak, ha bármely eleméről a következőre átlépve a növekmény csak két különböző értéket vehet fel. (Így például a 3, 7, 11, 12, 16, 17, 18 sorozat félig számtani.) Az A mátrixra teljesül, hogy az első három sora félig számtani sorozatot alkot (vagyis a sor elemein balról jobbra végighaladva félig számtani sorozatot kapunk), az összes többi sora pedig számtani sorozatot alkot. Mutassuk meg, hogy $r(A) \leq 9$ (ahol r-rel a rangot jelöltük).

9. Legyen A és B $n \times m$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{r}(A + B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B).$$