Lineáris leképezések

Bevezetés a számításelméletbe 1
12. gyakorlat

Lineáris leképezés

Az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha létezik olyan $(k \times n)$-es A mátrix, melyre minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $f(\underline{x}) = A\underline{x}$ teljesül. Jelölés: $A = [f]$.

Ha $n = k$, akkor f-et lineáris transzformációnak is nevezzük.

Tétel

Az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény akkor és csak akkor lineáris leképezés, ha tetszőleges $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(*i*) $f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$,

(*ii*) $f(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot f(\underline{x})$.

Ekkor f mátrixa egyértelmű; tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az i-edik oszlopa $f(\underline{e}_i)$.

1. Lineáris leképezések-e az alábbi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvények? Ha igen, akkor írjuk fel a leképezés $[f]$ mátrixát.
   (a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto (y, 3x)$
   (b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto (x^2, y^2)$
   (c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x - y + z)$
   (d) Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ minden $\underline{v}$ síkvektorhoz azt az x tengelyre eső vektort rendeli, melynek az első koordinátája a $\underline{v}$ két koordinátája közül a nagyobb (nemkisebb).
   (e) Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ minden síkvektorhoz az x tengelyre vett tükörképének origó körüli $+60°$-os elforgatottját rendeli.

2. Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformációról azt tudjuk, hogy az $(5, 3)$ vektor képe a $(2, 3)$ vektor, a $(4, 3)$ vektoré pedig a $(3, 2)$ vektor. Mi lesz a $(11, 6)$ vektor képe?

3. Álljon az $\mathbb{R}^4$ V altere azon $\underline{x}$ vektorokból, melyekre $x_1 = x_2$ és $x_3 = 3x_4$ teljesül (ahol x_i az $\underline{x}$ vektor i-edik koordinátáját jelöli). Adjunk meg egy bázist V-ben és mutassuk is meg róla, hogy bázis. (Azt, hogy V altér, nem kell igazolnunk.)

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x4 &= 2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + p \cdot x_3 + 9x_4 &= p \end{aligned}$$