Magtér, képtér

Bevezetés a számításelméletbe 1
13. gyakorlat

Magtér, képtér

Az $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés magtere $\operatorname{Ker} f := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = \underline{0}\}$,
a képtere pedig $\operatorname{Im} f := \left\{\underline{y} \in \mathbb{R}^k \mid \exists \underline{x} \in \mathbb{R}^n:\ f(\underline{x}) = \underline{y}\right\}$.

Dimenziótétel

Tetszőleges $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés esetén $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

Állítás

Tetszőleges f lineáris leképezés esetén

- $\operatorname{Im} f$ megegyezik az $[f]$ mátrix oszlopai által generált altérrel;
- az $[f]$ mátrix redukált lépcsős alakjában a vezéregyest tartalmazó oszlopok száma $\dim \operatorname{Im} f$,
- azaz $\mathrm{r}([f]) = \dim \operatorname{Im} f$,
- sőt, az $[f]$ mátrix előbb említett oszlopai $\operatorname{Im} f$ egy bázisát alkotják.

1. Határozzuk meg az XII/1. feladatban szereplő lineáris leképezések magterét és a képterét, valamint ezek dimenzióját.

2. Adjuk meg $\operatorname{Im} f$ és $\operatorname{Ker} f$ egy-egy bázisát, ha az f lineáris leképezés $[f]$ mátrixa a következő.

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 12 & 1 & 14 \\ 3 & 9 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

3. A sík egy lineáris transzformációjának mátrixa a szokásos bázisban
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix},$$
   ahol x tetszőleges valós szám. Határozzuk meg x függvényében a transzformáció képterét és magterét.

4. Az $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel.

   a. Tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő.

   b. Tetszőleges 8 lineárisan független $\mathbb{R}^n$-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem $\underline{0}$.

   Bizonyítsuk be, hogy ekkor $n \leq 13$.