Altér, generátorrendszer, lineáris függetlenség

Bevezetés a számításelméletbe 1

5. gyakorlat

Altér

A $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ részhalmazt az $\mathbb{R}^n$ egy alterének nevezzük, ha V zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve.

Lineáris kombináció

Legyen $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. A $\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{v}_k$ vektort a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

Generált altér

Legyen $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$. A

$$\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \rangle := \{\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{v}_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

halmazt a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok által generált altérnek nevezzük.

Lineáris függetlenség

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszerről azt mondjuk, hogy lineárisan független, ha

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{v}_k = \underline{0} \iff \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0;$$

ellenkező esetben lineárisan összefüggő vektorrendszerről beszélünk.

1. Az e egyenes egyenletrendszere $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$, az f egyenes egyenletrendszere pedig $\frac{x}{-2} = \frac{3-y}{6} = \frac{2-z}{10}$. Döntsük el, hogy e és f párhuzamosak-e. Ha igen, akkor határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely mindkettőt tartalmazza.

2. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(1;3;4)$ és a $Q(3;6;10)$ pontokon és párhuzamos az $\frac{x-9}{3} = y + 4 = \frac{z}{5}$ egyenletrendszerű egyenessel.

3. Legyen
$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Kifejezhető-e az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból az $\underline{e}$ vektor?
   (b) $\mathbb{R}^3$ mely vektorai fejezhetőek ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorokból?
   (c) $\mathbb{R}^3$ mely vektorai fejezhetőek ki az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból?

4. $\mathbb{R}^4$ mely vektorai fejezhetők ki az $(1,1,0,0)$, $(0,1,1,0)$, $(0,0,1,1)$ vektorokból?

5. Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek. Ha nem, akkor határozzuk meg az általuk generált altér egyenletét.

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

6. Döntsük el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_3 = 0 \right\}$ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_2 = 1 \right\}$

7. Alteret alkot-e $\mathbb{R}^2$-ben azon (x, y) vektorok halmaza, melyekre teljesül, hogy $x^2 = y^2$?

8. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci-típusúnak, ha a (felülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például az alábbi vektor Fibonacci-típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci-típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

9. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ vektorokról tudjuk, hogy az összegük a nullvektor. Bizonyítsuk be, hogy

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{k-1} \rangle = \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_k \rangle.$$

10. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független vektorrendszer egy tetszőleges vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{a} - \underline{c}$, $\underline{b} + \underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független.

11. Tegyük fel, hogy az $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, ..., $\underline{u}_m$ vektorok között pontosan egy olyan van, ami kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Mutassuk meg, hogy ekkor ez a vektor csakis a nullvektor lehet.