Bázis, dimenzió; Gyakorlás

Bevezetés a számításelméletbe 1
6. gyakorlat

F-G egyenlőtlenség

Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$ altér, $\{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq V$ lineárisan független rendszer, $\{\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m\}$ pedig V egy generátorrendszere. Ekkor $k \leq m$.

Bázis

A $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ vektorrendszert a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisának nevezzük, ha lineárisan független és egyúttal V generátorrendszere.

Tétel

Ha egy $V \leq \mathbb{R}^n$ altérnek van k-elemű bázisa, akkor minden bázisa k-elemű.

Dimenzió

A $V \leq \mathbb{R}^n$ vektortér dimenziója k, ha V-nek van k-elemű bázisa (ekkor V összes bázisa k-elemű).

1. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e?
   (a) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független.
   (b) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{d}$ lineárisan független.
   (c) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$.
   (d) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ generátorrendszer.
   (e) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ bázis.
2. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ alábbi alterének egy bázisát:
$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 3x + 2y + z = 0 \right\}.$$
3. Álljon a $V \leq \mathbb{R}^4$ altér azokból az $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ oszlopvektorokból, amelyekre fennállnak az $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ és a $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$ egyenletek. Határozzuk meg a V altér dimenzióját. (A feladat teljes értékű megoldásához nem szükséges megmutatni, hogy V valóban altér.)
4. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a páros sorszámú és a páratlan sorszámú koordináták összege is 0. Határozzuk meg $\dim W$ értékét és

adjunk meg W-ben egy olyan bázist, ami tartalmazza az alábbi két vektort. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

5. Oldjuk meg a $146x \equiv 4 \pmod{234}$ lineáris kongruenciát.

6. Egy n egész szám 3 maradékot ad 72-vel osztva. Milyen maradékot adhat 102-vel osztva a $2n+7$ szám?

7. Oldjuk meg az $5x \equiv 3 \pmod 7$, $3x \equiv 7 \pmod 8$ szimultán kongruenciarendszert.

8. Mi az utolsó két számjegye a 9-es számrendszerben a (10-es számrendszerben felírt) $20^{19^{18}}$ számnak?