Gauss-elimináció; Gyakorlás

Bevezetés a számításelméletbe 1
7. gyakorlat

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

   (a)
$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 3\\ 3x+5y+10z &= 5\\ 3x+2y+13z &= 2\\ 6x+13y+18z &= 13 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 3\\ 3x+5y+10z &= 5\\ 3x+2y+13z &= 2\\ 6x+13y+17z &= 13 \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 3\\ 3x+5y+10z &= 5\\ 3x+2y+13z &= 2\\ 6x+13y+17z &= 11 \end{aligned}$$

2. A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}7\\-4\\2\\3\end{pmatrix},\quad \underline{b}=\begin{pmatrix}14\\-3\\7\\8\end{pmatrix},\quad \underline{c}=\begin{pmatrix}-7\\19\\7\\p\end{pmatrix}$$

   vektorok.

3. Döntsük el, hogy az alábbi négy vektor a p valós paraméter mely értékeire lesz lineárisan független.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}4\\1\\6\\p\end{pmatrix}$$

4. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}+\underline{b}+3\underline{c}$, $3\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ vektorok is biztosan lineárisan függetlenek?

5. A p paraméter milyen értékére esnek egy síkba az $A(2;3;3)$, $B(3;4;1)$, $C(4;6;2)$ és $D(p;2;5)$ pontok?

6. Az e egyenes paraméteres egyenletrendszere $x = t + 1$, $y = 2t + 1$, $z = 2t + 1$, az S sík egyenlete $4x - 3y + pz = q$. Határozzuk meg az összes olyan p és q értéket, melyre az e egyenes az S síkban fekszik.

7. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok. Tegyük fel, hogy $\underline{w} \neq \underline{0}$ és a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_i + \lambda \cdot \underline{w}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_k$ vektorrendszer lineárisan független a $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár és az $1 \leq i \leq k$ egész bármely megválasztása esetén. Következik-e ebből, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w}$ rendszer is lineárisan független?

8. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ $\mathbb{R}^4$-beli vektorok. Tegyük fel, hogy bármely k, ℓ és m egész számokra, amelyek nem mindegyike 0, a $k \cdot \underline{a} + \ell \cdot \underline{b} + m \cdot \underline{c}$ lineáris kombináció értéke különbözik a $\underline{0}$-tól. Következik-e ebből, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független rendszer?

9. Az alábbi két C kód mindegyike a bemenetként (10-es számrendszerben) kapott $a, b > 0$ egészek összegét számítja ki (persze feleslegesen bonyolultan). Tegyük fel, hogy a kódok végrehajtásakor a gép az (alsó tagozatban tanult) „írásbeli” összeadás, szorzás, stb. segítségével végzi el. Döntsük el, hogy az eljárások polinomiálisak-e. (A `ceil(b/2.0)` a $b/2$ felső egészrészét, míg a `floor(b/2.0)` a $b/2$ alsó egészrészét adja vissza.)

   (a)
   ```
   while (b > 0) {
      a = a+1;
      b = b-1;
   }
   printf("Összeg: %d", a);
   ```

   (b)
   ```
   while (b > 0) {
      a = a + ceil(b/2.0);
      y = floor(b/2.0);
   }
   printf("Összeg: %d", a);
   ```

10. Milyen maradékot adhat az n egész szám 142-vel osztva, ha $20n + 4$ és $72n - 12$ azonos maradékot ad 142-vel osztva?