Bázis, dimenzió

Bevezetés a számításelméletbe 1
2019
7. gyakorlat

F-G egyenlőtlenség

Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$ altér, $\{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq V$ lineárisan független rendszer, $\{\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m\}$ pedig V egy generátorrendszere. Ekkor $k \leq m$.

Bázis

A $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ vektorrendszert a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisának nevezzük, ha lineárisan független és egyúttal V generátorrendszere.

Tétel

Ha egy $V \leq \mathbb{R}^n$ altérnek van k-elemű bázisa, akkor minden bázisa k-elemű.

Dimenzió

A $V \leq \mathbb{R}^n$ vektortér dimenziója k, ha V-nek van k-elemű bázisa (ekkor V összes bázisa k-elemű).

Koordinátavektor

Legyen $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér egy bázisa és $\underline{v} \in V$ egy tetszőleges vektor. Azt mondjuk, hogy a $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$ vektor a $\underline{V}$ vektor B szerinti koordinátavektora, ha $\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{b}_k$.
Jelölése:

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

1. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e?

   (a) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független.

   (b) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{d}$ lineárisan független.

   (c) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$.

   (d) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ generátorrendszer.

   (e) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ bázis.

   Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ bázis, akkor határozzuk meg $\underline{d}$ koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

2. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ alábbi alterének egy bázisát:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 3x + 2y + z = 0 \right\}.$$

3. Legyen

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 36 \\ p \end{pmatrix}.$$

A p paraméter milyen értékére igaz a $\underline{v} \in \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$ állítás? A p ezen értékére határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort, ahol $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$.

4. Álljon a $V \leq \mathbb{R}^4$ altér azokból az $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ oszlopvektorokból, amelyekre fennállnak az $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ és a $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$ egyenletek. Határozzuk meg a V altér dimenzióját. (A feladat teljes értékű megoldásához nem szükséges megmutatni, hogy V valóban altér.)

5. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a páros sorszámú és a páratlan sorszámú koordináták összege is 0. Határozzuk meg $\dim W$ értékét és adjunk meg W-ben egy olyan bázist, ami tartalmazza az alábbi két vektort. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

6. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{a} + \underline{b}, \underline{c} + \underline{d}, \underline{a} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{d}$ vektorok által generált altér dimenzióját.

7. Az $\mathbb{R}^4$ egy V alteréről annyit tudunk, hogy tartalmazza a jobbra látható vektorok mindegyikét. Meg lehet-e határozni ez alapján V dimenzióját? (Válaszunkat természetesen indokoljuk is.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^{99}$ tér két 50-dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme!

9. Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \ldots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ és $\underline{v}_2 + \underline{v}_4 + \underline{v}_6 + \ldots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ teljesül a V vektortér $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektoraira. Jelöljük a $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100} \rangle$ generált alteret W-vel. Bizonyítsuk be, hogy $\dim W \leq 98$.

10. Tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}^n$ térnek a $H = \{a, b, c, d, e, f\}$ részhalmaza rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy H bármely 3-elemű X részhalmazára X és $H \setminus X$ ugyanazt az alteret generálja. Igazoljuk, hogy ha $\{a, b, c\}$ lineárisan független vektorok, akkor H-nak bármely 3 vektora lineárisan független.