Gauss-elimináció

Bevezetés a számításelméletbe 1
2019
8. gyakorlat

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

   (a)
   $$\begin{aligned} x+3y+2z &= 3 \\ 3x+5y+10z &= 5 \\ 3x+2y+13z &= 2 \\ 6x+13y+18z &= 13 \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} x+3y+2z &= 3 \\ 3x+5y+10z &= 5 \\ 3x+2y+13z &= 2 \\ 6x+13y+17z &= 13 \end{aligned}$$

   (c)
   $$\begin{aligned} x+3y+2z &= 3 \\ 3x+5y+10z &= 5 \\ 3x+2y+13z &= 2 \\ 6x+13y+17z &= 11 \end{aligned}$$

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1-x_2+4x_4 &= -2 \\ 2x_1-2x_2+x_3+8x_4 &= -3 \\ x_1+x_2+6x_3+8x_4 &= 2 \\ 3x_1-3x_2+px_3+(p^2+p+12)x_4 &= -6 \end{aligned}$$

3. Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1-3x_2-14x_3 &= -17 \\ 2x_1-6x_2-28x_3+p\cdot x_4 &= q-34 \\ 3x_1-7x_2-36x_3+4p\cdot x_4 &= 4q-37 \end{aligned}$$

4. (a) A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a számát.

   (b) Ha p-nek és q-nak van olyan értéke, amelyre az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a p és q ezen értékeire adjuk meg az összes megoldást.

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3-7x_4 &= 8 \\ 4x_1+4x_2+x_3-28x_4 &= 23 \\ 5x_1+3x_2-x_3-31x_4 &= 14 \\ 2x_1+p\cdot x_4 &= q \end{aligned}$$

5. Oldjuk meg az alábbi n ismeretlenes és n egyenletből álló egyenletrendszereket.

   (a)

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n &= n \\ x_1+2x_2+2x_3+\ldots+2x_n &= n-1 \\ x_1+2x_2+3x_3+\ldots+3x_n &= n-2 \\ &\vdots \\ x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n &= 1 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= 1 \\ x_2+x_3 &= 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1}+x_n &= 1 \\ x_n+x_1 &= 1 \end{aligned}$$

6. Találtunk egy lapot, amin valaki a (lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló) Gauss-eliminációt gyakorolta. A papír sajnos erősen megrongálódott, ezért csak a kiinduló feladat részletei és a néhány lépés után kapott lépcsős alak olvasható.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \square & 6 & \square & \square & \square \\ 2 & 4 & -4 & 7 & \square \\ 5 & 10 & \square & \square & -4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

   A kiinduló feladatban a $\square$-tel jelölt számok olvashatatlanok. (Ezek persze egymástól különböző értékek is lehetnek.) Rekonstruáljuk a lap elveszett részeit: adjuk meg a $\square$-ekben álló értékeket, majd futtassuk le a Gauss-eliminációt és adjuk meg az egyenletrendszer megoldásait.

7. Egy négyváltozós lineáris egyenletrendszerből bárhogyan is hagyunk el egy egyenletet, a kapott egyenletrendszer egyértelműen megoldható lesz. Legkevesebb hány egyenletet kell tartalmazzon az eredeti egyenletrendszer?

8. Az $L \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt akkor nevezzük egyenesnek, ha léteznek olyan $\underline{p}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektorok, hogy $L = \{\underline{p} + \lambda \cdot \underline{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; vagyis L azokból az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{x}$ vektorokból áll, amelyekre $\underline{x} = \underline{p} + \lambda \cdot \underline{v}$ teljesül valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n változós lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a megoldáshalmaza (mint $\mathbb{R}^n$-beli vektorok halmaza) tartalmaz egyenest.