Gyakorlás

Bevezetés a számításelméletbe 1
2019
2. konzultáció

1. Legyen V azon altere $\mathbb{R}^4$-nek, melyet azok a vektorok alkotnak, melyek x_1, x_2, x_3, x_4 koordinátáira teljesül, hogy $x_4 = x_1 + 2x_2 - 3x_3$. Adjunk meg V-ben egy olyan bázist, mely tartalmazza az alábbi $\underline{v}$ vektort.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. A $W \subseteq \mathbb{R}^6$ altér álljon azokból az $\mathbb{R}^6$-beli vektorokból, amelyeknek a páratlan sorszámú koordinátái felülről lefelé haladva 2 kvóciensű, a páros sorszámú koordinátái pedig felülről lefelé haladva 3 kvóciensű mértani sorozatot alkotnak. Így például az alábbi vektor W-beli. Határozzuk meg a W altér dimenzióját.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 15 \\ 12 \\ 45 \end{pmatrix}$$

3. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 17x_2 - 19x_3 &= 28 \\ 2x_1 + 11x_2 - 12x_3 &= p + 34 \\ 7x_1 + 26x_2 + p \cdot x_3 &= p + 15 \end{aligned}$$

4. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e minden $n \times n$-es A mátrixra.

   (a) Ha létezik olyan $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre az $(A \mid \underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer nem megoldható, akkor $\det A = 0$.

   (b) Ha $\det A = 0$, akkor létezik olyan $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre az $(A \mid \underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer nem megoldható.

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a determináns definíciója szerint.

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 9 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

6. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét minden p valós szám esetén.

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 3 & 7 \\ 1 & p & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & p & p \end{vmatrix}$$

7. Határozzuk meg az A^{-1} és a B mátrixokat, ha az A és az $A \cdot B$ mátrixok az alábbiak.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 777 & 666 \\ 999 & 888 \end{pmatrix}$$

8. A p, q és r valós paraméterek minden értékére döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak és ha létezik, akkor adjuk meg az A^{-1} bal felső sarkában álló elemét.

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ q & 3 & 8 \\ r & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

9. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját minden $x, y \in \mathbb{R}$ értékre.

$$\begin{pmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & y & y \end{pmatrix}$$

10. Az 5×10-es A mátrixról tudjuk, hogy elhagyható belőle egy alkalmasan választott sor és oszlop úgy, hogy a kapott 4×9-es mátrix rangja azonos legyen A rangjával. Azt is tudjuk továbbá, hogy bárhogyan is hagyunk el A-ból két sort és két oszlopot, a kapott 3×8-as mátrix rangja már különbözik A rangjától. Határozzuk meg A rangját.

11. Az $n \times n$-es A és B mátrixokra teljesül, hogy $B \neq 0$ és $A \cdot B = B$. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $n \times n$-es C mátrix, amelyre $C \neq 0$ és $A^\top \cdot C = C$.

12. Egy 10 egyenletből álló, 10 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer a kibővített együtthatómátrixával van megadva. Tudjuk, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

    (a) Igaz-e, hogy minden esetben elérhető a kibővített együtthatómátrix egy elemének megváltoztatásával, hogy az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása legyen?

    (b) Igaz-e, hogy minden esetben elérhető a kibővített együtthatómátrix egy elemének megváltoztatásával, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása?