Műveletek mátrixokkal, mátrixok inverze

Bevezetés a számításelméletbe 1
2020
10. gyakorlat

Determinánsok szorzástétele

Ha A, B $n \times n$-es valós mátrixok, akkor $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Tétel

Legyenek A, B, C $n \times n$-es mátrixok és legyen $i \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges. Ha az A, B, C mátrixok az i-edik sorukat leszámítva megegyeznek, valamint a C mátrix sora éppen az A és a B mátrix i-edik sorának a tagonkénti összege, akkor $\det C = \det A + \det B$.

Inverz mátrix

Egy A $n \times n$-es mátrix inverzén azt az $n \times n$-es A^{-1} mátrixot értjük, melyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ teljesül.

Tétel

Az $n \times n$-es A mátrixnak akkor és csak akkor létezik inverze, ha $\det A \neq 0$.

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az AB, BA, $A \cdot A^\top$, $AB + 2C$ mátrixokat!

2. (a) Számítsuk ki az A^{2015} mátrixot az alábbi A mátrixra.

   (b) Számítsuk ki $\det\left(B^{2015}\right)$ értékét az alábbi B mátrixra.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Számítsuk ki az A^{2018} mátrixot az alábbi A mátrixra.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Döntsük el, hogy az alábbi egyenlőségek igazak-e bármely $n \times n$-es A és B mátrixokra.

   (a) $(AB)^2 = A^2 B^2$

   (b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

   (c) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

   (d) $(A-E)^2 = A^2 - 2A + E$

   (e) $A^3 + E = (A+E)(A^2 - A + E)$

   (f) $A^3 - E = (A-E)(A^2 + A + E)$

5. Léteznek-e olyan 2×2-es A és B mátrixok, melyekre $A^2 = B^2$, de $A \neq B$ és $A \neq (-1) \cdot B$?

6. Az A mátrix minden eleme 0, 1 vagy -1, és a 0-tól különböző elemeinek száma 2012. Határozzuk meg az $A \cdot A^\top$ mátrix főátlójában álló elemeknek az összegét.

7. A 100×100-as A mátrix első 50 oszlopának minden eleme 3, az utolsó 50 oszlop minden eleme 2. A 100×100-as B mátrix minden oszlopára teljesül, hogy abban az első 50 elem összege 2, az utolsó 50 elem összege 3. Határozzuk meg az AB szorzatot.

8. Legyen A az alábbi mátrix. Adjunk meg egy olyan B mátrixot, melyre AB a 2×2-es egységmátrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

9. Oldjuk meg az alábbi A és B mátrixokra az $X \cdot A = B$ mátrixegyenletet (vagyis adjuk meg az összes olyan X mátrixot, amelyre az egyenlet fenáll.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 12 & 24 & 2 & 12 \\ 3 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 & 35 \end{pmatrix}$$

10. A 2018 oszlopú A mátrixra teljesül, hogy léteznek olyan $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{2018}$, $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$ vektorok, amelyekre $A \cdot \underline{x}_1 = A \cdot \underline{x}_2$. Mutassuk meg, hogy ekkor léteznek olyan $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_{2018} \in \mathbb{R}^{2018}$ vektorok is, amelyek közül semelyik kettő nem egyenlő és $A \cdot \underline{z}_1 = A \cdot \underline{z}_2 = \ldots = A \cdot \underline{z}_{2018}$.

11. Számoljuk ki a következő mátrixok inverzét, amennyiben azok léteznek!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \ldots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

12. Az A és B $n \times n$-es mátrixokról tudjuk, hogy $\det A \neq 0$, valamint hogy $AB = 0$. Határozzuk meg a B mátrixot!

13. Határozzuk meg az alábbi A mátrix inverzének bal felső sarkában álló elemét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

14. (a) Határozzuk meg azon p valós értékeket, melyekre az alábbi mátrixnak van inverze.
    (b) $p = 3$ esetén adjuk meg az inverz mátrix bal felső elemét.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & p \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$