Mátrixok rangja

Bevezetés a számításelméletbe 1
2020
11. gyakorlat

Definíció.

Legyen A tetszőleges mátrix. Azt mondjuk, hogy

(i) A oszloprangja r, ha A-nak van r darab lineárisan független oszlopa, de $r+1$ darab már nincs;

(ii) A sorrangja r, ha A-nak van r darab lineárisan független sora, de $r+1$ darab már nincs;

(iii) A determinánsrangja r, ha A-nak van $r\times r$-es nemnulla determinánsú részmátrixa, de $(r+1)\times(r+1)$-es már nincs.

Tétel, definíció.

Tetszőleges A mátrix oszlop-, sor- és determinánsrangja egyenlő. Ezt a közös értéket nevezzük az A mátrix rangjának.

1. Számoljuk ki a következő mátrixok rangját!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Számoljuk ki a következő mátrixok rangját a c, az x, illetve a p és q valós paraméterek függvényében!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2c+7 & 3c-2 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & p \\ 3 & 4 & q & 2 \end{pmatrix}$$

3. Egy 4×6-os A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij} = i^2 + i\cdot j$ minden $1 \le i \le 4$ és $1 \le j \le 6$ esetén. Határozzuk meg A rangját.

4. A 6×6-os A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 4$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan B és C mátrixok, amelyekre $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(C) = 2$ és $A = B + C$.

5. Nevezzünk egy számsorozatot félig számtaninak, ha bármely eleméről a következőre átlépve a növekmény csak két különböző értéket vehet fel. (Így például a 3, 7, 11, 12, 16, 17, 18 sorozat félig számtani.) Az A mátrixra teljesül, hogy az első három sora félig számtani sorozatot alkot (vagyis a sor elemein balról jobbra végighaladva félig számtani sorozatot kapunk), az összes többi sora pedig számtani sorozatot alkot. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{r}(A) \le 9$.

6. Legyen A és B $n\times m$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{r}(A+B) \le \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B).$$

7. Legyen M egy 100 oszlopú mátrix. Jelölje A az M első 70 oszlopából álló, B pedig az M utolsó 70 oszlopából álló mátrixot. Végül jelölje X az M középső 40 oszlopából álló mátrixot. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) \ge \mathrm{r}(M) + \mathrm{r}(X).$$

8. Nevezzünk egy 4×4-es mátrixot szépen kiegészíthetőnek, ha ki tudjuk egészíteni (egy-egy plusz sorral és oszloppal) 5×5-ös invertálható mátrixszá. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e.

   (a) Ha egy 4×4-es mátrix szépen kiegészíthető, akkor a rangja legalább 3.

   (b) Ha egy 4×4-es mátrix rangja legalább 3, akkor a mátrix szépen kiegészíthető.

9. Határozzuk meg az alábbi A és B mátrixok hiányzó, betűkkel jelölt elemeit, ha tudjuk, hogy $B = A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & p \\ q & 5 & r \\ s & -26 & 27 \end{pmatrix}$$

10. Legyen A $m \times n$-es (vagyis m sorból és n oszlopból álló), B pedig $n \times m$-es (vagyis n sorból és m oszlopból álló) mátrix. Tegyük fel, hogy $n < m$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az AB mátrix nem invertálható.

11. Egy 5×5-ös A mátrixnak pontosan hat olyan 3×3-as részmátrixa van, ami invertálható. Mutassuk meg, hogy A nem invertálható.