Lineáris leképezések

Bevezetés a számításelméletbe 1
2020
12. gyakorlat

Lineáris leképezés

Az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha létezik olyan $(k \times n)$-es A mátrix, melyre minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $f(\underline{x}) = A\underline{x}$ teljesül. Jelölés: $A = [f]$.

Ha $n = k$, akkor f-et lineáris transzformációnak is nevezzük.

Tétel

Az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény akkor és csak akkor lineáris leképezés, ha tetszőleges $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(*i*) $f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$,

(*ii*) $f(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot f(\underline{x})$.

Ekkor f mátrixa egyértelmű; tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az i-edik oszlopa $f(\underline{e}_i)$.

Magtér, képtér

Az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés magtere $\operatorname{Ker} f = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = \underline{0}\}$,
a képtere pedig $\operatorname{Im} f = \left\{\underline{y} \in \mathbb{R}^k \mid \exists \underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) = \underline{y}\right\}$.

Dimenziótétel

Tetszőleges $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés esetén $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

Állítás

Tetszőleges f lineáris leképezés esetén

- $\operatorname{Im} f$ megegyezik az $[f]$ mátrix oszlopai által generált altérrel;
- az $[f]$ mátrix redukált lépcsős alakjában a vezéregyest tartalmazó oszlopok száma $\dim \operatorname{Im} f$,
- azaz $\mathrm{r}([f]) = \dim \operatorname{Im} f$,
- sőt, az $[f]$ mátrix előbb említett oszlopai $\operatorname{Im} f$ egy bázisát alkotják.

1. Lineáris leképezések-e az alábbi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvények? Ha igen, akkor írjuk fel a leképezés $[f]$ mátrixát, illetve a leképezések magterét és a képterét, valamint ezek dimenzióját.

   (a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto (y, 3x)$

   (b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto (x^2, y^2)$

   (c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x - y + z)$

   (d) Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ minden $\underline{v}$ síkvektorhoz azt az x tengelyre eső vektort rendeli, melynek az első koordinátája a $\underline{v}$ két koordinátája közül a nagyobb (nemkisebb).

   (e) Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ minden síkvektorhoz az x tengelyre vett tükörképének origó körüli $+60°$-os elforgatottját rendeli.

2. Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformációról azt tudjuk, hogy az $(5, 3)$ vektor képe a $(2, 3)$ vektor, a $(4, 3)$ vektoré pedig a $(3, 2)$ vektor. Mi lesz a $(11, 6)$ vektor képe?

3. Adjuk meg $\mathrm{Im}\, f$ és $\mathrm{Ker}\, f$ egy-egy bázisát, ha az f lineáris leképezés $[f]$ mátrixa a következő.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 12 & 1 & 14 \\ 3 & 9 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

4. A sík egy lineáris transzformációjának mátrixa a szokásos bázisban

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix},$$

ahol x tetszőleges valós szám. Határozzuk meg x függvényében a transzformáció képterét és magterét.

5. Az $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés a $(2, 6)$ vektorhoz a $(14, 16, 14)$ vektort, az $(1, -3)$ vektorhoz pedig az $(1, -10, -5)$ vektort rendeli.

(a) Írjuk fel f mátrixát.

(b) Mit rendel f a $(4, -1)$ vektorhoz?

(c) A p paraméter milyen értékére teljesül a $(10, -9, p) \in \mathrm{Im}\, f$ állítás?

6. Az $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel.

a. Tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő.

b. Tetszőleges 8 lineárisan független $\mathbb{R}^n$-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem $\underline{0}$.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $n \leq 13$.

7. Legyen $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és legyen $A = [f]$ az $[f]$ mátrixa. Igazak-e mindig az alábbi állítások?

(a) Ha $\mathrm{Ker}\, f$ tartalmaz a nullvektortól különböző vektort, akkor $\det A = 0$.

(b) Ha $\det A = 0$, akkor $\mathrm{Ker}\, f$ tartalmaz a nullvektortól különböző vektort.

(c) Ha $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, f$, akkor $A^2 = 0$.

(d) Ha $A^2 = 0$, akkor $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, f$.

8. Legyen $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in \mathbb{R}^n$. Melyek igazak mindig az alábbi állítások közül?

(a) Ha $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ generátorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $f(\underline{v}_1), \ldots, f(\underline{v}_m)$ generátorrendszer $\mathbb{R}^k$-ban.

(b) Ha $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ generátorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $f(\underline{v}_1), \ldots, f(\underline{v}_m)$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\, f$-ben.

(c) Ha $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ lineárisan független rendszer, akkor $f(\underline{v}_1), \ldots, f(\underline{v}_m)$ lineárisan független rendszer.

(d) Ha $f(\underline{v}_1), \ldots, f(\underline{v}_m)$ lineárisan független rendszer, akkor $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ lineárisan független rendszer.