Sajátérték, sajátvektor

Bevezetés a számításelméletbe 1

2020

13. gyakorlat

Sajátérték, sajátvektor.

Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix.

(i) A $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárt az A sajátértékének nevezzük, ha létezik olyan $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor, amelyre $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ teljesül.

(ii) A $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektort az A sajátvektorának nevezzük, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, amelyre $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ teljesül.

Tétel

Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix. A $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$.

Karakterisztikus polinom

Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix. A $\det(A - \lambda \cdot E)$ determináns értékét az A karakterisztikus polinomjának nevezzük, ahol λ a változó. A jele $k_A(\lambda)$.

1. (a) Határozzuk meg az alábbi A mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Határozzuk meg az A^{100} mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát!

(c) Határozzuk meg az $3A^2 - 4A + 5E$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát!

2. Sajátértéke-e a 3 az alábbi A mátrixnak? Ha igen, adjuk meg az A egy 3-hoz tartozó sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

3. (a) Sajátvektora-e az alábbi $\underline{v}$ vektor az alábbi A mátrixnak?

(b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét és az összes, ehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektort.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

4. A p valós paraméter minden értékére adjuk meg az alábbi mátrix minden sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez tartozó minden sajátvektort.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ p & 4 & p \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Az $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya

$$f:\ (x, y, z) \mapsto (0, 3x + 4y + z, 6x + 2y + 5z).$$

Adjuk meg az $[f]$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

6. Mutassuk meg, hogy ha az A négyzetes mátrixnak nincs valós sajátértéke, akkor van inverze és az inverzének sincs valós sajátértéke.

7. Az $(n \times n)$-es A mátrixra teljesül, hogy ha az A mátrix főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adunk (de a többi elemét nem változtatjuk), akkor nulla determinánsú mátrixot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor az A^3 főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adva is nulla determinánsú mátrixot kapunk.