Térbeli koordinátageometria

Bevezetés a számításelméletbe 1
2020
4. gyakorlat

Egyenes paraméteres egyenletrendszere

Adott $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ és $P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. A P ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{array}\right\}.$$

Egyenes egyenletrendszere

Adott $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ és $P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Ha $a, b, c \neq 0$, akkor a P ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Ha például $c = 0$, akkor az egyenes egyenletrendszere:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{x-x_0}{a} & = & \frac{y-y_0}{b} \\ z & = & z_0 \end{array}\right\}.$$

Sík egyenlete

Adott $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ és $P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. A P ponton átmenő, $\underline{n}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0.$$

1. Tartalmazza-e az $R(1;3;4)$ pontot az a sík, amelyet a $P(1;7;-1)$ és a $Q(11;9;-5)$ pontokat összekötő egyenes a P-ben merőlegesen döf?

2. Határozzuk meg az $S:\ 2x - 3y + 4z = 3$ sík és a következő egyenesek metszetét.

   (a) $\left.\begin{array}{c} x = 11 + 2t \\ y = -t \\ z = 29 + 5t \end{array}\right\}$

   (b) $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+1}{8} = \dfrac{z+1}{3}$

3. Határozzuk meg az $x + y + z = 5$ és a $2x - y - 2z = 3$ egyenletű síkok metszetét.

4. Az e egyenesről tudjuk, hogy merőlegesen döfi az $x + 2y + 3z = 6$ egyenletű síkot az $(1, 1, 1)$ pontban, az f egyenesről pedig, hogy átmegy az $(5, 2, -1)$ ponton és a $(13, 4, -5)$ ponton. Döntsük el, hogy e-nek és f-nek van-e közös pontja.

5. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékére lesz az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{3}$ és az $\frac{x-3}{2} = \frac{y-p}{3} = \frac{z}{4}$ egyenletrendszerű egyeneseknek közös pontja.

6. Párhuzamos-e az
$$\frac{5x+3}{10} = \frac{4-y}{5} = \frac{5-2z}{2}$$
egyenletrendszerű egyenes a $6x + y + 7z = 91$, illetve az $5x + 2y = 79$ egyenletű síkok metszésvonalával?

7. Határozzuk meg az
$$x - 4 = \frac{y+5}{4} = \frac{2-z}{3}$$
egyenletrendszerű e egyenes minden olyan P pontját, amelyre a P-t a $Q(7, 12, 4)$ ponttal összekötő f egyenes merőleges e-re.

8. Legyen adott $A(1, 0, 0)$, $B(1, -2, 4)$, és
$$e: \ \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{3} = z - 3.$$
Keressük meg az e egyenesen azon C pontot, melyre $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BC}\right|$ teljesül.

9. Van-e az $A(-1; -2; 1)$, $B(3; 1; 3)$ és $C(7; 6; 3)$ pontokat tartalmazó síknak olyan pontja, amely az y-tengelyre esik? Ha igen, melyik?

10. Átmegy-e az origón az az S sík, amely tartalmazza a $P(2; -1; 4)$ pontot és az $\frac{x-1}{4} = \frac{1-y}{5} = \frac{z-3}{6}$ egyenletrendszerű e egyenest?

11. Határozzuk meg a térben az $\frac{x+3}{5} = \frac{y+1}{9} = z$ egyenletrendszerű e és az $\frac{x}{4} = \frac{y+8}{6}$, $z = 7$ egyenletrendszerű f egyenesek normáltranszverzálisának az egyenletrendszerét – vagyis azét az n egyenesét, amely e-t és f-et is merőlegesen metszi.

12. Határozzuk meg az $A(1; 5; 2)$, $B(2; 7; 4)$ és $C(2; 9; 10)$ pontok által meghatározott háromszög A csúcsán átmenő (belső) szögfelezőjének az egyenletrendszerét.

13. Legyen
$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Kifejezhető-e az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból az $\underline{a}$ vektor?

   (b) Kifejezhető-e az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból az $\underline{b}$ vektor?

   (c) Az $\mathbb{R}^4$ mely vektorai fejezhetőek ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorokból?

   (d) Az $\mathbb{R}^4$ mely vektorai fejezhetőek ki az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból?

   (e) Az $\mathbb{R}^4$ mely vektorai fejezhetőek ki az $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ és $\underline{b}$ vektorokból?

14. Az $\mathbb{R}^4$ mely vektorai fejezhetők ki az $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$ vektorokból?