Bázis, dimenzió

Bevezetés a számításelméletbe 1
2020
6. gyakorlat

F-G egyenlőtlenség.

Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$ altér, $\{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq V$ lineárisan független rendszer, $\{\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m\}$ pedig V egy generátorrendszere. Ekkor $k \leq m$.

Bázis.

A $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ vektorrendszert a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisának nevezzük, ha lineárisan független és egyúttal V generátorrendszere.

Tétel.

Ha egy $V \leq \mathbb{R}^n$ altérnek van k-elemű bázisa, akkor minden bázisa k-elemű.

Dimenzió.

A $V \leq \mathbb{R}^n$ vektortér dimenziója k, ha V-nek van k-elemű bázisa (ekkor V összes bázisa k-elemű).

Koordinátavektor.

Legyen $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér egy bázisa és $\underline{v} \in V$ egy tetszőleges vektor. Azt mondjuk, hogy a $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$ vektor a $\underline{v}$ vektor B szerinti koordinátavektora, ha $\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{b}_k$.
Jelölése:

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

1. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e!

(a) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ generátorrendszer $\mathbb{R}^3$-ban.
(b) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{b}$ generátorrendszer $\mathbb{R}^3$-ban.
(c) $\underline{a} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$.
(d) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ban.
(e) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{b}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ban.

Határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ és az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{b} \rangle$ alterek dimenzióját!

Ha $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$, illetve ha $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}\}$ bázis, akkor határozzuk meg $\underline{a}$ koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

2. Határozzuk meg az Ötödik gyakorlat 7. feladatában definiált $\mathbb{R}^5$-beli altérnek (vagyis a Fibonacci-típusú vektorok alterének) a dimenzióját.

Adjuk meg ennek az altérnek egy olyan bázisát, amely tartalmazza az említett feladatban a példaként megadott vektort.

3. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ alábbi alterének egy bázisát:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 3x + 2y + z = 0 \right\}.$$

4. Álljon a $V \leq \mathbb{R}^4$ altér azokból az $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ oszlopvektorokból, amelyekre fennállnak az $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ és a $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$ egyenletek. Határozzuk meg a V altér dimenzióját. (A feladat teljes értékű megoldásához nem szükséges megmutatni, hogy V valóban altér.)

5. Legyen

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 36 \\ p \end{pmatrix}.$$

A p paraméter milyen értékére igaz a $\underline{v} \in \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$ állítás? A p ezen értékére határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort, ahol $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$.

6. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a páros sorszámú és a páratlan sorszámú koordináták összege is 0. Határozzuk meg $\dim W$ értékét és adjunk meg W-ben egy olyan bázist, ami tartalmazza az alábbi két vektort. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

7. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}, \underline{b}+\underline{d}$ vektorok által generált altér dimenzióját.

8. Tudjuk, hogy az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{w}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{x} - \underline{y}, \underline{z} - \underline{w}, \underline{x} + \underline{y} + \underline{z} + \underline{w}$ vektorok által generált altér dimenzióját.

9. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^{99}$ tér két 50-dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme!

10. Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \ldots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ és $\underline{v}_2 + \underline{v}_4 + \underline{v}_6 + \ldots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ teljesül a V vektortér $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektoraira. Jelöljük a $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100} \rangle$ generált alteret W-vel. Bizonyítsuk be, hogy $\dim W \leq 98$.

11. Megadható-e $\mathbb{R}^4$-ben

    (a) 4 darab vektor úgy, hogy közülük bármely 2 lineárisan független legyen, de semelyik 3 ne legyen lineárisan független?

    (b) 6 darab vektor úgy, hogy közülük bármely 5 generátorrendszert alkosson, de semelyik 4 se alkosson generátorrendszert $\mathbb{R}^4$-ben?

12. Legyenek U és V olyan 10 dimenziós alterek $\mathbb{R}^{20}$-ban, amelyeknek a nullvektoron kívül nincs közös eleme. Mutassuk meg, hogy minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^{20}$ vektorhoz találhatók olyan $\underline{u} \in U$ és $\underline{v} \in V$ vektorok, amelyekre $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$.